PROBLEME DE MATEMATICĂ, FIZICĂ ȘI CHIMIE

DATE LA CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL SUPERIOR ÎN ANII 1978-1979

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI, 1980

PROBLEME DE MATEMATICĂ, FIZICĂ ŞI CHIMIE

DATE LA CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂŢĂMÎNTUL SUPERIOR ÎN ANII

1978-1979

Coordonatori:

MATEMATICĂ: I. GH. ŞABAC
V. OLARIU
O. STĂNĂŞILĂ

FIZICĂ: I. POPESCU
D. IORDACHE

CHIMIE: FELICIA CORNEA
FR. ALBERT

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ
Bucureşti

Prefață

Reprezentînd experiența a două concursuri organizate pe plan central, cu subiecte unice, la nivelul întregii țări, lucrarea de față vizează o mai bună orientare a viitorilor candidați la examenele de admitere în învățămîntul superior.

Volumul cuprinde probleme date la disciplinele fundamentale — matematică, fizică și chimie — la concursurile de admitere în anii 1978 și 1979.

Organizarea materialului respectă structura probelor pe specializări, profiluri ori grupe de profiluri de învățămînt, precum și pe anii respectivi de concurs. Ținînd seama că timpul destinat pentru elaborarea unei lucrări scrise a fost de 3 ore, socotit din momentul în care subiectele au fost transcrise integral pe tablă, rezultă că o astfel de structurare dă posibilitatea unei autotestări a viitorilor candidați la studenție.

Pentru unele probleme se dau soluții complete, pentru altele numai indicații și răspunsuri, iar în ansamblu lucrarea reprezintă un ghid de rezolvare a problemelor și în același timp un material util în pregătirea din preajma concursurilor.

Dorim să subliniem că *problemele prezentate în volumul de față trebuie înțelese prin prisma programelor și manualelor școlare corespunzătoare absolvenților de liceu, promoțiile 1978 și, respectiv, 1979. Ca atare, nu trebuie considerate ca fiind singurele tipuri de subiecte posibile a fi date în astfel de concursuri. Se impune de la sine ca pregătirea candidaților la viitoarele concursuri de admitere în învățămîntul superior să fie realizată conform cerințelor și exigențelor seriei respective curente de absolvenți.*

Trebuie menționat că problemele date în concurs constituie rodul muncii unui colectiv de autori, avînd la bază propunerile unui larg activ de specialiști din învățămîntul superior.

Prof. dr. ing. VASILE CĂTUNEANU

MATEMATICĂ

Redactor: GABRIELA ILIESCU

Cuprins

I. Enunțuri 9

A. FACULTĂȚILE DE MATEMATICĂ 9

a. **Concursul de admitere din iulie 1978** 9
- Algebră 9
- Elemente de analiză matematică 10
- Geometrie plană, Geometrie în spațiu, Trigonometrie 11

b. **Concursul de admitere din iulie 1979** 11
- Algebră 11
- Elemente de analiză matematică 12
- Geometrie plană, Geometrie în spațiu, Trigonometrie 13

B. ÎNVĂȚĂMÎNT TEHNIC SUPERIOR-INGINERI 14

a. **Concursul de admitere din iulie 1978** 14
- Algebră și Elemente de analiză matematică (Mecanică, Chimie, Metalurgie, Construcții, Mine, Petrol și gaze) 14
- Algebră și Elemente de analiză matematică (Electrice, Fizică, Aeronave) 15
- Geometrie plană, Geometrie în spațiu, Trigonometrie (Mecanice, Metalurgie, Construcții, Mine, Petrol și gaze) 15
- Geometrie plană, Geometrie în spațiu, Trigonometrie (Electrice, Aeronave) 16

b. **Concursul de admitere din iulie 1979** 17
- Algebră și Elemente de analiză matematică (Electrice, Fizică, Aeronave) 17
- Algebră și Elemente de analiză matematică (Mecanice, Metalurgie, Chimie, Construcții) 18
- Algebră și Elemente de analiză matematică (Mine, Petrol și gaze) 19
- Algebră și Elemente de analiză matematică (Silvicultură, Tehnică piscicolă) 20

— Geometrie plană, Geometrie în spațiu, Trigonometrie (Electrice, Aeronave) 20
— Geometrie plană, Geometrie în spațiu, Trigonometrie (Mecanice, Metalurgie, Construcții) 21
— Geometrie plană, Geometrie în spațiu, Trigonometrie (Mine, Petrol și gaze) 22

C. ÎNVĂȚĂMÎNT SUPERIOR ECONOMIC 22

a. **Concursul de admitere din iulie 1978** 22
— Algebră și Elemente de analiză matematică (Seria I) 22
— Algebră și Elemente de analiză matematică (Seria a II-a) 23

b. **Concursul de admitere din iulie 1979** 24
— Algebră și Elemente de analiză matematică (Seria I) 24
— Algebră și Elemente de analiză matematică (Seria a II-a) 25

D. ARHITECTURĂ 26

a. **Concursul de admitere din iulie 1978** 26
— Algebră și Trigonometrie 26
— Geometrie plană, Geometrie în spațiu 27

b. **Concursul de admitere din iulie 1979** 27
— Algebră și Elemente de analiză matematică 27
— Geometrie plană, Geometrie în spațiu, Trigonometrie 28

E. ÎNVĂȚĂMÎNT SUPERIOR TEHNIC — SUBINGINERI, CONDUCTORI ARHITECȚI 29

a. **Concursul de admitere din iulie 1978** 29
— Algebră (Subingineri — Chimie) 29
— Algebră, Geometrie plană și Trigonometrie (Subingineri — Mecanice) 29
— Algebră, Geometrie plană și Trigonometrie (Subingineri — Electrice) 30

b. **Concursul de admitere din iulie 1979** 31
— Algebră, Geometrie plană, Trigonometrie (Subingineri — Electrice) 31
— Algebră, Geometrie plană, Trigonometrie (Subingineri — Mecanice) 31
— Algebră și Trigonometrie 32
— Algebră și Trigonometrie 33
— Algebră (Subingineri — Chimie) 34
— Algebră (Conductori arhitecți) 34
— Geometrie plană și Trigonometrie (Conductori arhitecți) 35

II. REZOLVARI (INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI) 37

I. ENUNȚURI

A. FACULTĂȚILE DE MATEMATICĂ

a. Concursul de admitere din iulie 1978

ALGEBRA

1. Să se determine valorile parametrului real a pentru care inegalitatea

$$\log_{\frac{a-1}{a+1}}(x^2+3) \geqslant 1$$

este verificată pentru orice valoare a lui $x \in \mathbf{R}$.

2. Să se arate că dacă $2^n + 1$ este un număr prim ($n \in \mathbf{N}$), atunci n este o putere a lui 2.

3. Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2.$$

Să se arate că f nu este injectivă. Este f surjectivă?

4. Să se demonstreze că rădăcinile reale ale ecuației $x^5 + x - 10 = 0$ sînt toate iraționale.

5. Să se scrie în ordine crescătoare numerele

$$\sqrt{3},\ \sqrt[3]{6},\ \sqrt[6]{30}.$$

6. Dacă a și b sînt numere reale, astfel încît $0 < a \leqslant b \leqslant 1$, să se arate că

$$a + \frac{1}{a} \geqslant b + \frac{1}{b}.$$

7. Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{|x|}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

Să se determine c astfel ca f să fie continuă pe $\mathbf{R}$.

8. Se consideră funcția f definită după cum urmează:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{(x-1)\,|x+1|}, & x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0] \\ 0, & x = -1 \\ \sin 2x, & x \in (0, \pi) \\ \dfrac{1}{2} \ln (\cos^2 x), & x \in [\pi, +\infty) \setminus \left\{\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}, \ldots, \dfrac{(2n+1)\pi}{2}, \ldots\right\} \end{cases}$$

Să se determine mulțimea C a punctelor în care f este continuă și mulțimea D a punctelor în care f este derivabilă.

9. Se consideră funcția $f_p: (0, \infty) \to \mathbf{R}$, dată de egalitatea

$$f_p(x) = x - \frac{p}{x},$$

unde p este un parametru real.

Să se studieze convexitatea funcției f_p pentru diferitele valori ale parametrului p.

10. Să se reprezinte grafic funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{0,2\} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{x}{|x-2|} + \frac{x-2}{|x|}.$$

11. Se consideră funcțiile f, g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, date prin

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \neq 0 \\ 1, \text{ dacă } x = 0 \end{cases} \text{ și } g(x) = \begin{cases} x^2, \text{ dacă } x \text{ este număr rațional} \\ 0, \text{ dacă } x \text{ este număr irațional.} \end{cases}$$

Să se studieze dacă există $\lim\limits_{x \to 0} f(g(x))$.

12. Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{4n - 4 - 2a_n}{\pi}\right)^n$, unde

$$a_n = \int_1^n \frac{2x^2}{x^2 + 1}\, dx, \quad n \in \mathbf{N}.$$

13. Se dă un romb $ABCD$ având lungimea laturii a. Prin vîrful A se duce o secantă oarecare care intersectează prelungirile laturilor CB și CD respectiv în E și F. Să se demonstreze că:

$$\frac{1}{CE} + \frac{1}{CF} = \frac{1}{a}.$$

14. Fie un tetraedru $VABC$. Să se arate că sferele cu centrele în mijloacele muchiilor VA, VB, VC și care trec prin V, au o coardă comună.

15. Se cere ecuația cercului cu centrul pe dreapta $x + y - 9 = 0$ și ortogonal cercurilor

$$(C_1)\ x^2 + y^2 - 4 = 0$$

și

$$(C_2)\ x^2 + y^2 - 2x = 0$$

16. Se consideră unghiurile ascuțite α, β, γ, a căror sumă este $\dfrac{\pi}{2}$.

Știind că numerele ctg α, ctg β, ctg γ formează o progresie aritmetică, se cere să se calculeze produsul ctg $\alpha \cdot$ ctg γ.

b. Concursul de admitere din iulie 1979

ALGEBRA

17. Să se demonstreze că dacă numerele reale a și b sînt astfel încît $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, atunci are loc inegalitatea

$$\log_2(a + b) > 1 + \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b).$$

18. Să se determine valorile parametrului real a astfel încît sistemul

$$x^2 + y^2 = z, \quad x + y + z = a$$

să aibă soluție (x, y, z) unică, x, y, z fiind numere reale.

19. Pentru cîte valori ale lui $n \geq 2$ natural are loc inegalitatea

$$\frac{(2n-1)!}{(2n-3)!} < 420?$$

20. Care dintre numerele $\log_2 3$, $\log_3 4$ este mai mare?

21. Să se determine toate numerele complexe z pentru care $|z| = -z^2$.

22. Să se calculeze cu o aproximație de două zecimale exacte rădăcina reală a ecuației $x^3 - 2x - 9 = 0$.

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

23. Fie (a_n) un șir mărginit de numere reale. Să se arate că dacă (b_n) este un șir de numere reale nenule astfel încît $\lim_{n\to\infty} |b_n| = \infty$, atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$; reciproca este adevărată?

24. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \sin^2 x - x^2 + \frac{x^4}{3}.$$

Să se arate că f este indefinit derivabilă și că

$$f^{(n+1)}(x) = 2^n \cdot \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

pentru orice $n \geq 4$ întreg și $(\forall)x \in \mathbf{R}$.

25. Să se traseze graficul funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}} & \text{dacă } x < 0 \\ x - \sin x \text{ dacă } x \geq 0 \end{cases}.$$

26. Să se determine numerele reale A, B, C astfel încît

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = Af\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + Bf(0) + Cf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

pentru orice funcție polinomială reală f de grad cel mult trei.

27. Să se calculeze

$$\lim_{a\to\infty} \int_1^a (x-1)\,e^{-x}\,dx.$$

28. Se consideră funcțiile $f_a : \mathbf{R}\setminus\{-a\} \to \mathbf{R}$ definite prin

$$f_a(x) = \frac{ax+1}{x+a},$$

a fiind un parametru real strict mai mare decît 1.

Să se calculeze aria suprafeței plane limitată de graficele funcțiilor f_a și f_b și de dreptele $x = a$, $x = b$, unde $1 < a < b$.

GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU, TRIGONOMETRIE

29. Se consideră un trapez $ABCD$ în care AD și BC sînt laturile neparalele și O, punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD.

Să se arate că ariile triunghiurilor AOD și BOC sînt egale. (Se cere atît soluție sintetică cît și soluție analitică).

30. Fie $ABCD$ un tetraedru cu proprietatea că fețele ABC și ABD au aceeași arie. Să se arate că suma distanțelor unui punct oarecare de pe segmentul CD la fețele ABC și ABD este constantă.

31. Să se arate că raportul dintre volumul unui con circular drept și volumul piramidei regulate înscrisă în con, avînd baza un poligon regulat cu n laturi ($n \geq 3$), depinde numai de n.

32. Să se determine valorile reale ale lui x care satisfac simultan condițiile:

$$2\cos^2 3x = 1 + \cos 4x, \quad |x| < 1.$$

B. ÎNVĂȚĂMÎNT TEHNIC SUPERIOR — INGINERI

a. Concursul de admitere din iulie 1978

ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

(Mecanice, Chimice, Metalurgie, Construcții, Mine, Petrol și gaze)

33. Să se simplifice fracția

$$\frac{C_n^k - C_{n-2}^k - C_{n-2}^{k-2}}{C_{n-2}^{k-1}}$$

unde $n \geqslant 3$ și $k \geqslant 2$ sînt numere naturale, iar C_m^n este numărul combinărilor de m obiecte, luate cîte n, $m \geqslant n$.

34. Să se găsească toate matricile

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$$

cu $x, y \in \mathbf{R}$, care verifică egalitatea

$$X^2 + X = \frac{1}{4} I,$$

unde I este matricea unitate de ordinul al doilea.

35. Se consideră funcția $f: E \to \mathbf{R}$ definită de

$$f(x) = \frac{2x - m}{2x^2 + 2x - (1 + m^2)}$$

unde E este domeniul ei maxim de definiție, iar m este un parametru real. Să se arate că oricare ar fi m, funcția f nu admite puncte de extrem.

36. Se dă

$$f_n(x) = \frac{1 + x + x^2 + \ldots + x^n}{1 + x^n}$$

unde $x \in [0, +\infty)$, $n \in \mathbf{N}$. Să se traseze graficul funcției $f: [0, +\infty)\setminus\{1\} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

și să se calculeze integrala $\int_0^1 [f_2(x) - f_1(x)]dx$.

ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

(Electrice, fizică, aeronave)

37. Fie ecuația

$$x^3 + (2m - 5) \cdot x^2 + (9 - 5m) \cdot x + 2(m - 3) = 0,$$

m fiind un parametru real.

Să se arate că ecuația admite o rădăcină x_1 independentă de m și apoi să se determine m astfel încît să avem

$$\log_{10} |x_2 - x_3| = \frac{1}{2} \log_{10} (6m + 5),$$

x_2 și x_3 fiind celelalte rădăcini ale aceleiași ecuații.

38. Să se determine numerele reale x care verifică inegalitatea

$$\log_{\frac{1}{5}} \left(\log_7 \frac{x^2 - 5x}{x + 4} \right) < 0.$$

39. Să se găsească punctele de minim și de maxim ale funcției

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{1 + 10x - 4x^2}{2(1 + x^2)} + 4 \ln \sqrt{1 + x^2} - 3 \operatorname{arctg} x.$$

40. Fie $f: \mathbf{R}\setminus\{-1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 4 \cdot (1 + x)^{-2}$.

a) Să se reprezinte graficul lui f.

b) Să se afle aria $S(a)$ a domeniului plan delimitat de graficul lui f și dreptele $y = x$, $x = 1$, $x = a$, $a > 1$ și să se calculeze apoi $\lim_{a \to \infty} S(a)$.

GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU, TRIGONOMETRIE

(Mecanice, Metalurgie, Construcții, Mine, Petrol și gaze)

41. Latura CD a pătratului $ABCD$ se împarte în trei părți egale: $DE = EF = FC$. Dreapta AE taie dreapta BC în G. Se notează cu H mijlocul segmentului AG. Să se calculeze lungimile segmentelor CG, AE și DH, în funcție de $a = CD$.

42. Un con circular drept care are raza bazei R și înălțimea $h = 2R$ se taie cu un plan paralel cu planul bazei determinînd astfel un trunchi de con de înălțime d.

1) Să se calculeze volumul acestui trunchi de con în funcție de R și d.

2) Să se determine d în funcție de R astfel ca în acest trunchi de con să se poată înscrie o sferă.

43. Să se determine valorile lui x pentru care expresia

$$E(x) = \frac{\cos 2x}{\sin 2x - \sqrt{2}\cos x}$$

nu are sens (nu este definită). Să se scrie $E(x)$ ca un raport de forma $\frac{a \cdot \sin x + b}{\cos x}$ pentru valorile lui x în care $E(x)$ are sens, a și b fiind constante reale.

44. Fie S_1, S_2, S_3 trei sfere cu același centru O și razele respectiv r_1, r_2, r_3 date, astfel încît $r_1 < r_2 < r_3$, $r_1^2 + r_2^2 = r_3^2$. Fie P un punct pe sfera S_3.

1) Să se calculeze în funcție de r_1 și r_2 ariile laterale A_1 și A_2 ale conurilor cu vîrful în P înscrise în sfera S_3 și tangente la sferele S_1, respectiv S_2.

2) În cazul cînd $A_1 = A_2\sqrt{3}$, să se calculeze unghiurile pe care le fac generatoarele celor două conuri cu dreapta PO.

GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU, TRIGONOMETRIE

(Electrice, Aeronave)

45. Într-un triunghi ABC cu $\hat{B} < 90°$, $\hat{C} < 90°$ se cunosc laturile a, b, c. Pe paralela dusă prin A la latura BC se consideră punctele D și E astfel încît B și D să fie de aceeași parte față de dreapta AC și $\overset{\frown}{ABD} = \overset{\frown}{ACB}$, iar C și E să fie de aceeași parte față de dreapta AB și $\overset{\frown}{ACE} = \overset{\frown}{ABC}$.

1) Să se calculeze lungimile segmentelor BD și CE în funcție de a, b, c.

2) Să se afle raportul dintre aria trapezului $BCED$ și aria triunghiului ABC, în funcție de a, b, c.

46. Să se calculeze aria laterală și volumul unui trunchi de con știind că raza bazei mari a trunchiului este $R\sqrt{3}$ și că în trunchiul respectiv se poate înscrie o sferă de rază R.

47. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0.$$

48. În triunghiul dreptunghic ABC cu $\hat{A} = 90°$ piciorul D al înălțimii din A se proiectează în punctul M pe latura AB și în punctul N pe latura AC. Să se arate că dreapta MN este tangentă la cercurile de diametre BD și DC și că dacă E, F, G sînt respectiv mijloacele segmentelor BD, DC, BC, atunci are loc relația:

$$8\,(ME^2 + NF^2) = BC^2 + 4\,DG^2.$$

b. Concursul de admitere din iulie 1979

ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

(Electrice, Fizică, Aeronave)

49. Să se demonstreze, folosind metoda inducției complete că pentru orice $n \geqslant 1$ natural, este valabilă inegalitatea

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < \frac{5n-2}{2n}.$$

50. Să se determine valorile parametrului real a pentru care ecuația logaritmică

$$\log_a x + (a + \log_a x)\log_{\sqrt{x}} a = 2a \log_x a$$

admite soluții și apoi să se rezolve ecuația.

51. Să se determine numerele reale a, b și c astfel încît ecuația

$$z^5 - 5z^4 + az^3 + bz^2 + c = 0$$

să admită rădăcina triplă $z = 2$, apoi să se rezolve ecuația.

52. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{\ln|x+1|} & \text{dacă } x \neq -2, -1, 0 \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Să se studieze variația funcției f și să se traseze graficul.

53. Se consideră funcția f: $[-1, \infty) \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = |1 - \sqrt{1 + x}|.$$

Să se studieze continuitatea și derivabilitatea lui f și să se calculeze volumul corpului definit, prin rotirea graficului lui f în jurul axei Ox, pentru $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ
(Mecanice, Metalurgie, Chimie, Construcții)

54. Se consideră expresia

$$E(x) = \log_4 x + \log_x 4.$$

Să se determine valorile $x \in \mathbf{R}$ astfel încît:

1) $E(x) = \frac{5}{2}$;

2) $E(x) < \frac{5}{2}$.

55. Să se determine valorile lui x pentru care are sens $C_{7x}^{x^2+10}$ și apoi să se rezolve ecuația $C_{7x}^{x^2+10} = C_{28}^{2}$ (C_n^m, $n \geqslant m$, reprezintă numărul combinărilor de n elemente luate cîte m).

56. Să se rezolve ecuația

$$\begin{vmatrix} 4-x & 1 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 \\ 2 & 4 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

57. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n + \sqrt{n} + 3}{2n + 1} \right)^{\sqrt{n}}.$$

58. Se consideră funcția f definită prin

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x(x + a)}$$

unde a este un parametru real.

1) Să se traseze graficul lui f știind că acest grafic trece prin punctul (1, 1).

2) Să se calculeze aria figurii plane determinată de graficul lui $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x(x + 2)}$, axa Ox și de dreptele $x = 1$ și $x = 2$.

ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ
(Mine, Petrol și Gaze)

59. Să se determine toate soluțiile sistemului

$$x^3 + y^3 = 7, \quad 2x + y = 3$$

60. Să se rezolve ecuația logaritmică

$$\frac{4}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2 x - 1} = 1$$

61. Să se determine numerele reale m și n astfel încît ecuația

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + mx + n = 0$$

să admită rădăcinile $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$ și apoi să se găsească și celelalte rădăcini x_3 și x_4 ale ecuației.

62. Să se studieze variația și apoi să se traseze graficul funcției f : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)\cdot(x+2)} & \text{dacă } x \neq -1 \text{ și } x \neq -2 \\ 1 & \text{dacă } x = -1 \\ 2 & \text{dacă } x = -2. \end{cases}$$

63. Se consideră funcția f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2} + mx,$$

unde m este un parametru real.

1) Să se determine m astfel încît $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$.

2) Pentru $m = 2$, să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

(Silvicultură, Tehnică piscicolă)

64. Se consideră ecuația $x^2 - (m+3)x - m = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2. Să se determine valorile parametrului real m astfel încît $x_1^2 + x_2^2 < 42$.

65. Să se determine soluțiile reale ale sistemului

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ |x| + |y| = 12. \end{cases}$$

66. Să se rezolve ecuația exponențială

$$3^{x+1} + 3^x = 108.$$

67. Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \frac{|x| - 3}{1 + 2|x|}.$$

1) Să se traseze graficul lui f.
2) Să se calculeze integrala

$$\int_0^3 f(x)\, dx.$$

68. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x \to 4,\ x<4} (13-3x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{8}}$.

GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU, TRIGONOMETRIE

(Electrice, Aeronave)

69. Se consideră un trapez isoscel avînd lungimea bazei mari egală cu a iar lungimile bazei mici ca și ale laturilor neparalele sînt egale cu $b (a > b,\ a < 3b)$. Să se calculeze lungimile diagonalelor trapezului ca și raza cercului circumscris trapezului.

70. Pe un cerc cu centrul în O și de rază R se consideră un punct A; pe tangenta în A la cerc se ia un punct B astfel încît perpendiculara în B pe tangentă să intersecteze cercul în punctele C și $D (C$ între B și $D)$. Să se verifice că

$$\frac{AD^2 + AC^2}{AD^2 - AC^2} = \frac{2R}{DC}.$$

71. Să se rezolve ecuația trigonometrică

$$\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{4}.$$

72. Să se arate că pentru orice $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$ avem

$$\left(\frac{1 + \mathrm{i}\operatorname{tg} x}{1 - \mathrm{i}\operatorname{tg} x}\right)^n = \frac{\operatorname{ctg} nx + \mathrm{i}}{\operatorname{ctg} nx - \mathrm{i}}\ (n \in \mathbf{N},\ \sin nx \neq 0).$$

73. Se consideră un triunghi ABC dreptunghic în A. Pe perpendicularele ridicate în B și C pe planul triunghiului, de aceeași parte a planului ABC, se iau punctele B' și C' respectiv. Să se arate că:

1) Raportul $\dfrac{V}{BB' + CC'}$, unde V este volumul piramidei $ABCC'B'$, nu depinde de alegerea punctelor B', C'.

2) Unghiul $\widehat{B'AC'}$ este cel mult egal cu $90°$; în ce situație acest unghi este egal cu $90°$?

GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU, TRIGONOMETRIE

(Mecanice, Metalurgie, Construcții)

74. Pe latura AB a triunghiului ABC, cu $AB > \dfrac{AC}{2}$, $AC > \dfrac{AB}{2}$, se consideră un punct M astfel încît $AM = \dfrac{AC}{2}$; pe latura AC se ia un punct N astfel încît unghiurile AMN și ACB să fie egale. Să se calculeze valoarea raportului $\dfrac{MN}{BC}$.

75. Să se rezolve ecuația trigonometrică

$$\cos x + \cos 3x = \cos 5x + \cos 7x.$$

76. Folosind forma trigonometrică a numerelor complexe, să se rezolve ecuația:

$$z^8 - 2z^4 + 2 = 0.$$

77. Se dă o piramidă regulată $VABCD$ avînd baza un pătrat $ABCD$ și lungimea înălțimii egală cu 8 cm. La ce distanță de planul bazei

trebuie dus un plan paralel cu planul bazei astfel încît raportul dintre volumul trunchiului de piramidă obținut și volumul piramidei $VABCD$ să fie egal cu $\frac{7}{8}$.

78. Să se afle aria totală și volumul corpului obținut prin rotirea unui hexagon regulat, avînd lungimea laturii egală cu a, în jurul uneia din laturi.

GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU, TRIGONOMETRIE
(Mine, Petrol și gaze)

79. Laturile unui triunghi au lungimile egale cu 2, $\sqrt{2}$, și $1+\sqrt{3}$; să se calculeze unghiurile acestui triunghi.

80. O diagonală a unui trapez isoscel, înscris într-un cerc avînd raza R, formează unghiurile α și 3α cu laturile neparalele $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$. Să se calculeze perimetrul acestui trapez, în funcție de R și α.

81. Lungimile laturilor unui paralelogram sînt egale cu a și b $(a<b)$ iar unghiul ascuțit dintre ele este egal cu α; să se exprime, cu ajutorul lui a, b și α, aria patrulaterului definit de bisectoarele interioare ale unghiurilor paralelogramului.

82. Să se rezolve ecuația $4\sin x+\cos 2x=1$.

83. Un dreptunghi avînd dimensiunile a și b se rotește o dată în jurul unei laturi iar a doua oară, în jurul celeilalte laturi. Să se găsească raportul dintre ariile totale și raportul dintre volumele celor două corpuri de rotație astfel obținute.

C. ÎNVĂȚĂMÎNT SUPERIOR ECONOMIC

a. Concursul de admitere din iulie 1978

ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ
(Seria I)

84. Să se determine valorile parametrului real a pentru care ecuația

$$\log_a x+(2a+\log_a x)\cdot\log_x a=a\cdot\log_x a^2$$

admite soluții și să se determine aceste soluții.

85. Fie matricea

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix};$$

să se arate că există două numere reale a și b astfel încît să aibă loc egalitatea matricială

$$aA^2+bA+2I=0,$$

unde I este matricea unitate de ordin trei.

86. Se consideră ecuația $x^3+mx^2+x-1=0$, unde m este un parametru cu valori întregi. Să se determine m în fiecare din cazurile:
a) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=7$, x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuației;
b) ecuația admite o rădăcină întreagă și două rădăcini complexe nereale.

87. Se dă funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ definită prin

$$f(x)=\frac{me^x-(m+1)e^{-x}}{e^x-1},\quad m\in\mathbf{R}\text{ fiind un parametru.}$$

Se cere:
a) Să se afle valorile lui m pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox.
b) Să se afle valorile lui m pentru care funcția f este monoton descrescătoare pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,\infty)$.
c) Să se traseze graficul funcției f pentru $m=-1$.

ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ
(Seria a II-a)

88. Să se afle x știind că avem

$$C_x^1+2C_x^2+3C_x^3=55,$$

C_x^k fiind numărul combinărilor de x obiecte luate cîte k.

89. Se consideră egalitatea de matrici

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}m&n\\p&q\end{bmatrix}.$$

Să se arate că dacă numerele a, b, c și d sînt în progresie aritmetică, atunci și numerele $n-m$, $p-n$, $q-p$ au aceeași proprietate.

90. Se dă funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

a) Să se studieze variația lui f și să se traseze graficul.
b) Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} [f(1) + f(2) + \ldots + f(n)].$$

91. Funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 1 \\ e^{-x+1} & \text{dacă } x \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Să se studieze continuitatea lui f.
b) Să se reprezinte graficul lui f.
c) Să se calculeze integrala

$$\int_1^2 [xf''(x) + f'(x)]\, dx.$$

b. Concursul de admitere din iulie 1979

ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

(Seria I)

92. Să se rezolve sistemul

$$ax + y + z = 1, \quad x + ay + z = a, \quad x + y + az = a^2$$

pentru valorile parametrului real *a* pentru care sistemul are soluție unică.

93. Să se determine numerele reale *a*, *b* și *c* știind că funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

admite un maxim egal cu $\frac{25}{4}$ iar graficul funcției trece prin punctele $(-2, 0)$ și $(1, 6)$.

94. Dacă x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației

$$x^2 - x + p = 0,$$

să se determine valorile parametrului real p astfel încît să se verifice egalitatea

$$(x_1^3 + x_2^3)^2 + x_1^2 + x_2^2 = 4p + 2.$$

95. Să se traseze graficul funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

96. Fie funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \frac{x^2 + 2bx + 5}{x - a}$$

a și *b* fiind parametri reali.
1) Să se determine *a* și *b* astfel încît

$$f'(-1) = f'(3) = 0.$$

2) Să se calculeze $\int_2^3 f(x)dx$ dacă $a = -b = 1$.

ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

(Seria a II-a)

97. Se consideră ecuația $x^2 + (5 - m)x + 5 - m^2 = 0$, unde m este un parametru real. Să se arate că rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației sînt reale oricare ar fi m și să se determine m astfel încît

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} < 0.$$

98. Să se determine termenul al treilea din dezvoltarea

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$$ știind că $2^{2n} - 2^n = 240$ $(n \in \mathbf{N})$.

99. Se consideră matricile

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 3 & \alpha \\ 6 & -1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 7 \end{Vmatrix},$$

unde α este o constantă reală. Să se determine α astfel încît $AB = BC$ și $A(B + C) = AB + AC$.

100. Se consideră funcția $f: \mathbf{R}\setminus\{-1, 3\} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \frac{x + a}{x^2 - 2x - 3},$$

unde a este un parametru real.

1) Să se determine a astfel încît $f'(0) = 1$.

2) Pentru $a = 1$ să se traseze graficul lui f.

101. Să se afle volumul corpului de rotație generat prin rotirea în jurul axei Ox a figurii plane determinată de graficul funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = x + e^x$, de axa Ox și de dreptele $x = 0$, $x = 1$.

D. ARHITECTURĂ

a. Concursul de admitere din iulie 1978

ALGEBRĂ ȘI TRIGONOMETRIE

102. Să se arate că expresia $E(x) = 3 - 4 \sin^2 x$ se poate scrie sub forma $E(x) = n \sin(\alpha + x) \sin(\alpha - x)$ în care n este un număr natural, iar α este un unghi ascuțit.

103. Să se arate că expresia

$$E = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} \cdot \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{ctg}^2 x)}{\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x}$$

nu depinde de $x\left(\text{pentru } x \neq \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbf{Z}\right)$.

104. Fie sistemul

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 2 \\ x + y + \alpha z = 3 \end{cases}$$

cu $\alpha \in \mathbf{R}$.

Să se găsească valorile lui α pentru care sistemul admite o singură soluție și să se afle soluția respectivă.

105. Fie $E(x, y) = x^2 - xy + y^2 - y + 1$.

a) Să se arate că pentru orice x, y reali avem $E(x, y) > 0$.

b) Să se arate că egalitatea $E(x, y) = E(2a + x, 2b + y)$ are loc pentru orice x, y reali dacă și numai dacă $a = b = 0$.

106. Într-un triunghi ABC cu $\widehat{B} < 90°$ și $\widehat{C} < 90°$, se cunosc laturile a, b, c. Pe paralela dusă prin A la latura BC se consideră punctele D și E astfel încît B și D să fie de aceeași parte față de AC și $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$ iar C și E sînt de aceeași parte față de AB și $\widehat{ACE} = \widehat{ABC}$.

1) Să se calculeze lungimile segmentelor BD și CE (în funcție de a, b, c).

2) Să se afle raportul dintre aria trapezului $BCED$ și aria triunghiului ABC în funcție de a, b, c.

107. În trapezul $ABCD$, avînd bazele AB și DC, diagonalele AC și BD se intersectează în O. Se presupune că $AB > DC$.

1) Cunoscînd $AB = a$, $DC = b$ și înălțimea h a trapezului, să se calculeze distanțele de la punctul O la cele două baze.

2) Fie V_1 și V_2 volumele născute prin rotirea trapezului $ABCD$ în jurul bazelor DC și respectiv AB. Care dintre cele două volume este mai mare?

108. Se consideră un triunghi ABC cu $AB = AC = 5$ cm, $BC = 6$ cm. Să se calculeze aria ABC, precum și raza cercului circumscris triunghiului.

109. În triunghiul ABC, medianele AA_1 și CC_1 se intersectează în punctul G. Se notează cu M mijlocul segmentului AC_1 și cu N mijlocul segmentului BC_1.

1) Să se determine raportul dintre aria triunghiului MGN și aria triunghiului ABC;

2) Dreapta NG intersectează dreapta BC în punctul P. Să se arate că $PB = BC$.

b. Concursul de admitere din iulie 1979

ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

110. Să se rezolve ecuația

$$3 \cdot C_x^3 = C_x^1,$$

unde C_n^m reprezintă numărul combinărilor de n elemente luate cîte $m (n \geqslant m)$.

111. Să se rezolve ecuația exponențială $3^{x+1} = 9^{\sqrt{x}}$

112. Să se determine numerele reale a, b și c astfel încît ecuația $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ să admită rădăcinile $x_1 = 1$, $x_2 = i$ și apoi să se afle celelalte rădăcini ale ecuației.

113. Se consideră funcția $f: (e, \infty) \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = x \cdot \ln\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{x}\right).$$

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

114. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x - 1}$, unde a și b sînt constante reale.

1) Să se determine a și b astfel încît graficul lui f să treacă prin punctul (2, 8) iar $f'(2) = -3$.

2) Dacă $a = 1$, $b = 2$ să se calculeze aria figurii plane determinată de graficul lui f, axa Ox și de dreptele $x = 2$, $x = 3$.

GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU, TRIGONOMETRIE

115. Un dreptunghi are lungimea diagonalelor egală cu d și unghiul ascuțit dintre diagonale egal cu α. Să se calculeze aria dreptunghiului în funcție de d și α.

116. Se consideră un triunghi isoscel ABC $(AB = AC)$ în care se cunosc aria S a triunghiului și raportul $k = \dfrac{BC}{AB}$, $0 < k < 2$. Să se calculeze perimetrul triunghiului în funcție de S și k.

117. Să se determine constanta reală a astfel încît să aibă loc relația $\dfrac{\sin 4x - \sin 2x}{\sin 4x + \sin 2x} = a \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} 3x$, pentru orice x real verificînd condițiile $\cos x \neq 0$, $\sin 3x \neq 0$.

118. Să se arate că triunghiul ABC ale cărui laturi a, b, c, satisfac relația $\dfrac{a + c}{b} = \operatorname{ctg} \dfrac{B}{2}$ este dreptunghic (unghiul B se opune laturii de lungime b).

119. Într-un paralelipiped dreptunghic $ABCDA_1B_1C_1D_1$ lungimile laturilor bazei sînt $AB = 8$ cm, $AD = 6$ cm și muchiile laterale sînt AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Să se calculeze volumul paralelipipedului știind că perimetrul triunghiului ACC_1 este egal cu 60 cm.

E. ÎNVĂȚĂMÎNT SUPERIOR TEHNIC—subingineri, conductori arhitecți

a. Concursul de admitere din iulie 1978

ALGEBRĂ

(Subingineri-Chimie)

120. Să se determine parametrul real m și să se rezolve ecuația

$$x^3 + mx - 10 = 0$$

știind că între rădăcinile x_1, x_2 și x_3 ale ei există relația

$$x_1 + x_2 = (m^2 - 10m + 8)x_3$$

121. Să se rezolve ecuația

$$x^3 + (3 - m)x^2 + (m - 3)x + 2(1 - 2m) = 0$$

unde m este un parametru real, știind că admite o rădăcină $x_1 = -2$.

122. Să se rezolve inegalitatea

$$\frac{x}{x - 1} < 1 - \frac{x - 5}{x + 1}.$$

123. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației

$$2x^2 + 2(m + 2)x + m^2 + 4m + 3 = 0$$

unde m este un parametru real.

a) Pentru ce valori ale lui m are loc relația $x_1 + x_2 = m$?

b) Pentru ce valori ale parametrului m avem $|x_1 + x_2 + 3x_1x_2| < 1$?

ALGEBRĂ, GEOMETRIE PLANĂ ȘI TRIGONOMETRIE

(Subingineri – Mecanice)

124. Să se rezolve ecuația

$$x^3 - (2a + 3)x^2 + a(a + 6)x - 3a^2 = 0$$

unde a este o constantă reală, știind că are o rădăcină întreagă independentă de a.

125. Să se rezolve ecuația

$$4^{x-1} - 2^x = 8$$

126. Să se determine soluțiile ecuației

$$\sin x + |\sin x| = 2 \cos x$$

conținute în intervalul $[0, 2\pi]$.

127. Se consideră patrulaterul $ABCD$ cu diagonalele AC și BD perpendiculare. Se cere:

a) Să se exprime aria patrulaterului în funcție de lungimile diagonalelor.

b) Să se arate că suma pătratelor a două laturi opuse este egală cu suma pătratelor celorlalte două laturi opuse.

ALGEBRĂ, GEOMETRIE PLANĂ ȘI TRIGONOMETRIE
(Subingineri – Electrice)

128. Fie ecuația $x^4 - 5(m+1)x^2 + 5m + 4 = 0$, unde m este un parametru real, avînd rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

a) Să se determine m dacă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 20 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$;

b) Pentru $m = 1$ să se rezolve ecuația dată.

129. Să se determine valorile constantelor reale a și b și să se rezolve ecuația

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + ax + b = 0,$$

știind că această ecuație are rădăcina $x_1 = 1 + i$.

130. Fie ecuația

$1 - \sin 2x - m(1 + \sin 2x) = 0$, m fiind un parametru real.

a) Să se rezolve ecuația pentru $m = \frac{1}{3}$;

b) Să se determine valorile lui m pentru care ecuația are soluții.

131. Fie un triunghi ABC cu $\widehat{A} < 90°$ și înălțimile BB', CC'. Să se arate că patrulaterul $BC'B'C$ este inscriptibil și că tangenta în A la cercul circumscris triunghiului este paralelă cu dreapta $B'C'$.

b. Concursul de admitere din iulie 1979

ALGEBRĂ, GEOMETRIE PLANĂ, TRIGONOMETRIE
(Subingineri – Electrice)

132. Dacă x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației

$$x^2 - (m-2)x + m + 1 = 0 \text{ și } m \in \mathbf{R},\ m \neq -1,$$

să se determine m astfel încît să avem

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$$

și să se rezolve apoi ecuația.

133. Să se rezolve inecuația

$$|x - 1| + x > 2.$$

134. Dacă $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = m$, să se calculeze în funcție de m

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x,\quad \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x,\quad \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x \left(x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right).$$

135. Două cercuri au razele egale cu 54 cm și 26 cm iar distanța dintre centrele lor este egală cu 1 m.

Să se calculeze lungimea unei tangente comune exterioară la aceste cercuri.

136. În triunghiul ABC fie D piciorul înălțimii din A și E, F respectiv mijloacele laturilor AB și AC.

Să se arate că unghiurile $\widehat{FDE}$ și $\widehat{BAC}$ sînt egale.

ALGEBRĂ, GEOMETRIE PLANĂ, TRIGONOMETRIE
(Subingineri – Mecanice)

137. Să se determine parametrul real și pozitiv m astfel încît o rădăcină a ecuației $x^2 + mx + 2m + 8 = 0$ să fie dublul celeilalte și apoi să se rezolve ecuația.

138. Se consideră ecuația algebrică

$$x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0,$$

în care a și b sînt numere întregi, avînd rădăcinile x_1, x_2, x_3.

1) Să se determine coeficienții a și b dacă au loc egalitățile

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 27;$$

2) Să se rezolve ecuația presupunînd $a = -3$, $b = -9$.

139. Se notează

$$E(x) = (1 + \operatorname{ctg} x)\sin^3 x + (1 + \operatorname{tg} x)\cos^3 x.$$

1) Să se arate că dacă $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci $E(x) = \sin x + \cos x$.

2) Să se rezolve ecuația $E(x) = -1$.

140. Se consideră un triunghi echilateral ABC avînd lungimea laturii egală cu a; fie D piciorul perpendicularei din A pe BC și S punctul de intersecție al paralelei prin A la BC cu perpendiculara din D pe AB. Să se calculeze lungimea segmentului AS.

141. Perimetrul unui triunghi ABC este egal cu 24 m iar

$$\frac{\sin A}{3} = \frac{\sin B}{4} = \frac{\sin C}{5}.$$

Să se găsească lungimile laturilor acestui triunghi.

ALGEBRĂ ȘI TRIGONOMETRIE

142. Să se rezolve inecuația

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} < 2x + 1.$$

143. Să se rezolve ecuația logaritmică

$$\log_{\frac{1}{2}} (3x^2 - 5x) = -\log_2 (5 - 3x).$$

144. Să se rezolve sistemul

$$A_x^y : A_x^{y-1} = 10, \quad C_x^y : C_x^{y+1} = \frac{5}{3},$$

unde A_m^n, C_m^n reprezintă numărul aranjamentelor, respectiv al combinărilor, de m elemente luate cîte $n (m \geqslant n)$.

145. Să se exprime cu ajutorul lui sin $2x$ produsul

$$\sin(x - 30°) \cdot \cos(x + 30°).$$

146. Dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi oarecare cărora li se opun laturile avînd lungimile a, b și respectiv c, să se arate că

$$\frac{1}{a}\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) + \frac{1}{b}\cos^2\left(\frac{B}{2}\right) + \frac{1}{c}\cos^2\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{p^2}{abc}$$

unde $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

(Se poate utiliza formula $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$ $(\forall) x \in \mathrm{R}$.)

ALGEBRĂ ȘI TRIGONOMETRIE

147. Să se rezolve ecuația

$$4|x| - x = 5x + 3,$$

în mulțimea numerelor reale.

148. Să se rezolve ecuația logaritmică

$$\frac{1}{2}\lg\sqrt{x^2 + x - 5} = \lg x + \lg\left(\frac{1}{x}\right),$$

logaritmii fiind zecimali.

149. Știind că avem ctg $x = 3$, să se calculeze valoarea raportului

$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x - 2\cos^2 x}.$$

150. Să se arate că pentru orice $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, expresia trigonometrică

$$\frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x - \operatorname{ctg}^2 x} - \operatorname{tg}^6 x$$

este o constantă și să se calculeze această constantă.

151. Se consideră ecuația

$$z^3 + (m - n)z^2 + (2m - 3n)z + m + 3n = 0.$$

Să se determine numerele reale m și n și să se rezolve ecuația știind că una dintre rădăcini este egală cu 2 iar suma celorlalte două este nulă.

ALGEBRĂ (Subingineri Chimie)

152. Să se rezolve inecuația

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3} > 1.$$

153. Să se determine parametrul real m și să se rezolve ecuația

$$4x^2 + mx + 5 = 0,$$

știind că între rădăcinile ei, x_1 și x_2 există relația $3x_1 + x_2 = -8$.

154. Să se rezolve ecuația exponențială

$$\sqrt{4^{x(x-1)-\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{2}.$$

155. Să se determine termenul care nu conține pe x în dezvoltarea

$$\left(ax^{-\frac{1}{2}} + xa^{-\frac{1}{2}}\right)^{30} \qquad (a, x \in \mathbf{R}).$$

156. Să se determine valoarea parametrului real a astfel încît între rădăcinile z_1, z_2, z_3 ale ecuației

$$4z^3 - 24z^2 + 56z + a = 0$$

să existe relația $z_1 + z_2 = z_3$ și apoi să se rezolve ecuația.

ALGEBRĂ (Conductori arhitecți)

157. Să se rezolve ecuația

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 2.$$

158. Să se determine toate numerele complexe $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$, care verifică ecuația

$$|z| - z = 1 + 2i.$$

159. Fie a o constantă reală ($a > 0$, $a \neq 1$).
1) Să se arate că

$$\left(\frac{a^x + a^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^x - a^{-x}}{2}\right)^2 = 1, \qquad (\forall)x \in \mathbf{R}.$$

2) Să se rezolve ecuația

$$(a^x + a^{-x})^2 + (a^x - a^{-x})^2 = 4.$$

160. Să se arate că dacă numerele reale și strict pozitive a și b verifică egalitatea $a^2 + b^2 = 7ab$, atunci ele vor verifica și egalitatea

$$\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b),$$

baza logaritmilor fiind 10.

161. Să se determine numerele raționale a și b astfel încît ecuația

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + 5x + 2 = 0$$

să admită soluția $x_1 = 1 + \sqrt{2}$. Să se determine apoi toate rădăcinile ecuației.

GEOMETRIE PLANĂ ȘI TRIGONOMETRIE
(Conductori arhitecți)

162. Se consideră un pătrat $ABCD$ având lungimea laturii egală cu a; cu centrele în punctele A, B, C, D, cu raza $\frac{a}{2}$ se duc patru cercuri. Să se calculeze raportul dintre suma ariilor celor patru cercuri și aria cercului circumscris pătratului $ABCD$.

163. Să se rezolve ecuația trigonometrică

$$4 \sin x - \cos 2x + 3 = 0.$$

164. Să se arate că raportul

$$\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x}$$

este pozitiv pentru orice x real diferit de $\frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

165. Aria laterală a unei prisme regulate avînd înălțimea h și baza un pătrat $ABCD$ este egală cu L. Să se determine în funcție de h și L aria secțiunii în prismă definită de planul care trece prin diagonala BD și este perpendicular pe planul bazei.

166. Într-o piramidă regulată avînd baza un pătrat, distanța de la centrul bazei la o muchie laterală este egală cu d iar uhghiul dintre înălțimea piramidei și o muchie laterală este egal cu α. Să se exprime cu ajutorul lui d și α aria totală a conului înscris în piramidă.

II. REZOLVĂRI (Indicații și răspunsuri)

1. Dacă $\frac{a-1}{a+1} > 1$, atunci inegalitatea din enunț devine $x^2 + 3 \geqslant \geqslant \frac{a-1}{a+1}$, adică $x^2 \geqslant \frac{-2(a+2)}{a+1}$ și aceasta este verificată pentru orice $x \in \mathbf{R}$ dacă și numai dacă $\frac{-2(a+2)}{a+1} \leqslant 0$. Așadar, în acest caz valorile cerute ale lui a sînt $a \in (-\infty, -2]$.

Dacă $0 < \frac{a-1}{a+1} < 1$, atunci inegalitatea din enunț devine $x^2 + 3 \leqslant \leqslant \frac{a-1}{a+1}$ și pentru nici o valoare a lui a ca *nu* poate fi verificată oricare ar fi x real.

În final, $a \in (-\infty, -2]$.

2. Presupunem prin absurd că n nu este o putere a lui 2, deci $n = 2^k \cdot s$ ($k \geqslant 0$ întreg și $s \geqslant 3$ impar). Atunci $2^n + 1 = a^s + 1$, unde $a = 2^{(2^k)}$ Deci $2^n + 1$ este divizibil cu $a + 1$, iar $1 < a + 1 < < 2^n + 1$, adică $2^n + 1$ nu ar fi prim.

3. Avem $f(0) = 2$ și scriind $f(x) = x^2(x - 3) + 2$, rezultă $f(3) = 2$, deci $f(0) = f(3)$ și f *nu* este injectivă.

Funcția f este surjectivă, deoarece $(\forall)\alpha \in \mathbf{R}$, ecuația $f(x) = \alpha$, de gradul trei, are soluții reale.

4. Ecuația nu are rădăcini întregi, deoarece divizorii ± 1, ± 2, ± 5, ± 10 ai lui 10 nu o verifică. Deoarece coeficientul lui x^5 este 1 și coeficienții ecuației sînt întregi, rezultă că ecuația nu are nici rădăcini raționale.

5. Avem $\sqrt{3} = \sqrt[6]{27}$, $\sqrt[3]{6} = \sqrt[6]{36}$, deci ordinea crescătoare cerută este: $\sqrt{3}$, $\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[3]{6}$.

6. Inegalitatea se scrie echivalent $\frac{a^2+1}{a} - \frac{b^2+1}{b} \geqslant 0$ și cum $a > 0$, $b > 0$, revine la $(b - a)(1 - ab) \geqslant 0$, și este evident verificată, deoarece $a \leqslant b$ și $ab < 1$, conform ipotezei.

7. Funcția f este continuă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, \infty)$. Trebuie aflat c astfel încît f să fie continuă în $x = 0$, adică $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ să existe și să fie egală cu c.

Dar $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{\pi}{2}$ și în final $c = \frac{\pi}{2}$.

8. Evident, f este continuă în punctele $x \neq -1, 0, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$.

Dar $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ nu există, apoi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = f(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$ și $\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ x<\pi}} f(x) = f(\pi) = \lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ x>\pi}} f(x) = 0$, deci f este continuă în $x = 0$, $x = \pi$, nu și în punctul $x = -1$. În concluzie, $C = \mathbf{R} \setminus \left\{-1, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\right\}$.

Funcția f este evident derivabilă în punctele diferite de $-1, 0, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ și nefiind continuă în punctele $-1, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ nu este derivabilă acolo. În fine, f nu este derivabilă nici în punctele $x = 0$, $x = \pi$, deci $D = R \setminus \left\{-1, 0, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\right\}$.

9. Avem $f_p''(x) = -\frac{2p}{x^3}$, $(\forall) x > 0$. Dacă $p \geqslant 0$, funcția f_p este concavă, iar dacă $p \leqslant 0$, funcția f_p este convexă pe intervalul indicat $(0, \infty)$.

10. Avem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2-x} + \frac{2-x}{x} & \text{dacă } x < 0 \\ \frac{x}{2-x} + \frac{x-2}{x} & \text{dacă } 0 < x < 2 \\ \frac{x}{x-2} + \frac{x-2}{x} & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$$

și

$$f'(x) = \begin{cases} 2\left[\frac{1}{(2-x)^2} - \frac{1}{x^2}\right] & \text{dacă } x < 0 \\ 2\left[\frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{x^2}\right] & \text{dacă } 0 < x < 2 \\ 2\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(2-x)^2}\right] & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$$

Tabloul de variație al funcției este

x	$-\infty$		0		2		∞
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -$		$+\ +\ +\ +$		$-\ -\ -\ -\ -$		
$f(x)$	-2	$\searrow$	$-\infty$ $\mid$ ∞	$\nearrow$	∞ $\mid$ ∞	$\searrow$	2

Graficul are forma din figura 1.

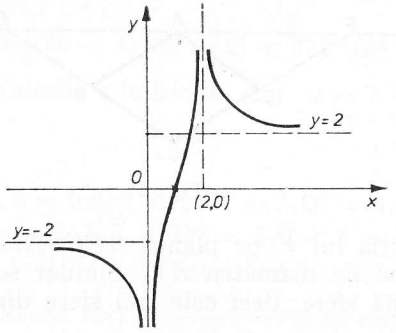


Fig. 1

11. Fie $h = f \circ g$, deci $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dacă } x \in \mathbf{Q} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \text{ sau dacă } x = 0. \end{cases}$

Fie $x_n \to 0$ un șir de numere raționale nenule; atunci $h(x_n) = x_n^2 \to 0$. Dacă $y_n \to 0$ este șir de numere iraționale, atunci $h(y_n) = 1$. Așadar, $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ *nu* există.

12. Avem

$$a_n = 2\int_1^n \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = 2n - 2 - 2 \operatorname{arc\,tg} n + \frac{\pi}{2}.$$

Apoi limita de calculat este $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4\operatorname{arctg} n - \pi}{\pi}\right)^n =$ $= e^{\frac{1}{\pi}\lim\limits_{n\to\infty} n\,(4\operatorname{arctg} n - 2\pi)}$ și după un calcul imediat se obține rezultatul $e^{-\frac{4}{\pi}}$.

13. $\triangle EBA \sim \triangle ECF$; se deduce relația $\frac{EA}{EF} = \frac{AB}{FC}$. Similar, $\triangle AFD \sim \triangle EFC$. Deci $\frac{FA}{EF} = \frac{AD}{CE}$. Adunînd relațiile obținute, rezultă relația $\frac{AB}{CF} + \frac{AD}{CE}$ și înlocuind $a = AB$, $a = AD$, rezultă egalitatea din enunț.

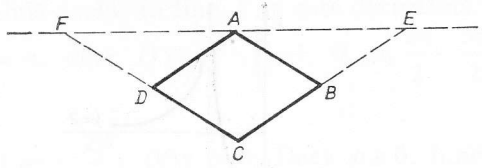


Fig. 2

14. Fie H proiecția lui V pe planul ABC. Atunci $VH \perp AH$, deci H aparține sferei de diametru AV. Similar se arată că H aparține celorlalte două sfere, deci cele trei sfere din enunț au coarda comună VH.

15. Axa radicală a cercurilor (C_1) și (C_2) este $x - 2 = 0$ și centrul cercului căutat se află pe această dreaptă; atunci coordonatele centrului cercului căutat vor fi $x = 2$, $y = 7$, iar ecuația acestui cerc va fi $(x-2)^2 + (y-7)^2 - r^2 = 0$, r^2 fiind puterea punctului $(2, 7)$ față de cercurile (C_1) și (C_2), adică $r^2 = 2^2 + 7^2 - -4 = 49$. În final, ecuația cerută este $(x-2)^2 + (y-7)^2 - -49 = 0$.

16. Așadar $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ și $2 \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma$.

Dar $\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2} - \beta$, deci $\operatorname{ctg}(\alpha + \gamma) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{ctg} \beta}$, adică $\frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \beta}$.

Rezultă $\frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma - 1}{2 \operatorname{ctg} \beta} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \beta}$, de unde

$$\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma = 3.$$

17. Inegalitatea se scrie echivalent $\log_2(a+b) > 1 + \log_2(ab)^{1/2}$, $\log_2(a+b) > \log_2(2\sqrt{ab})$, $a + b > 2\sqrt{ab}$, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$ și este evidentă (deoarece $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$).

18. Avem $z = a - x - y$ și prima ecuație devine $x^2 + y^2 + x + y - -a = 0$, $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = a + \frac{1}{2}$. Valoarea cerută este $a = -\frac{1}{2}$. Soluția corespunzătoare este $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

19. Inegalitatea se scrie $(2n-1)(2n-2) < 420$, $2n^2 - 3n - 209 < 0$, $-\frac{19}{2} < n < 11$. Valorile admisibile sînt $n = 2, 3, \ldots 10$ (în total 9 valori).

20. Notăm $a = \log_2 3$, $b = \log_3 4$, deci $2^a = 3$, $3^b = 4$, de unde $2^{ab} = 4$, $ab = 2$. Se observă că $2\sqrt{2} \leqslant 2^{3/2} = 2\sqrt{2} < 3 = 2^a$, deci $a > \sqrt{2}$ și cum $ab = 2$, $a > 0$, $b > 0$, rezultă $b < \sqrt{2}$, adică $b < a$.

Altă soluție: se notează $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$ și se observă că $f'(x) < 0$ pentru $x > 1$, deci $f(2) > f(3)$ etc.

21. Fie $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbf{R})$; egalitatea din enunț devine $\sqrt{a^2 + b^2} = -(a^2 - b^2 + 2abi)$, deci $\begin{cases} ab = 0 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = b^2 - a^2 \end{cases}$

Dacă $a = 0$, atunci $|b| = b^2$, deci $b = 0$, 1, -1 și dacă $b = 0$, se obține $\sqrt{a^2} = -a^2$, deci $a = 0$. În concluzie, numerele cerute sînt $z = 0$, $z = i$, $z = -i$.

22. Din șirul lui Rolle rezultă că ecuația are o singură rădăcină reală, situată în intervalul (2,3). Prin metodele studiate în clasa a XII-a se obține rădăcina căutată $\simeq 2{,}39$. (Acest exercițiu este tratat în Manualul de algebră clasa a XII-a, ediția 1978.)

23. Deci $\frac{1}{b_n} \to 0$ și $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to 0$ (șirul (a_n) fiind mărginit). Reciproca nu este adevărată; de exemplu, $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 1$, $(\forall) n \geqslant 1$.

24. Pentru $n = 4$ se verifică imediat că $f^{(5)}(x) = 16 \sin 2x = 2^4 \sin\left(2x + 4\frac{\pi}{2}\right)$. Presupunem $n \geqslant 4$ și că afirmația este probată pentru n; trebuie verificat că

$$f^{(n+2)}(x) = 2^n \cdot \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) \cdot 2 = 2^{n+1} \sin\left(2x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right),$$

adică $\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$, ceea ce este evident.

25. Tabloul de variație

x	$-\infty$	0	2π	$4\pi \ldots$	∞
y'	$+$	$+ \; 0$	$0 + + 0 + + 0 + \ldots$		
y	-1	$\nearrow \; 0$	$0 \nearrow 2\pi \nearrow 4\pi \nearrow \ldots.$		

Graficul este trasat în figura 3.

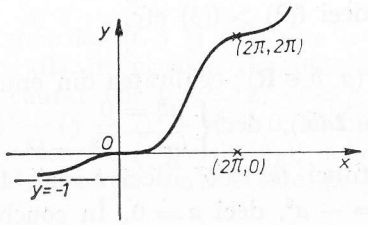


Fig. 3

26. Trebuie aflate A, B, C astfel încît $(\forall)\, a, b, c, d \in \mathbf{R}$ să avem

$$\frac{2b}{3} + 2d = \int_{-1}^{1} (ax^3 + bx^2 + cx + d)dx =$$

$$= A\left(-\frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{b}{2} - \frac{c}{\sqrt{2}} + d\right) + Bd + C\left(\frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{b}{2} + \frac{c}{\sqrt{2}} + d\right), \text{ de unde } A = B = C = \frac{2}{3}.$$

27. Integrînd prin părți, rezultă $\int_1^a (x-1)e^{-x}\,dx = \frac{1}{e} - e^{-a} - (a - 1)\,e^{-a}$ și limita cerută este egală cu $\frac{1}{e}$.

28. Se observă că pentru $1 < a < b$ avem $f_a < f_b$ pe intervalul $[a, b]$, deci aria cerută va fi

$$A = \int_a^b [f_b(x) - f_a(x)]\,dx = \int_a^b \frac{(b-a)(x^2-1)}{(x+a)(x+b)}\,dx = (a-b)^2 + (1-b^2)\ln\frac{2b}{a+b} - (1-a^2)\ln\frac{a+b}{2a}$$

după calcule imediate.

29. *Soluție sintetică:* aria $AOD = \frac{OA \cdot OD \cdot \sin\alpha}{2}$, aria $BOC = \frac{OB \cdot OC \cdot \sin\alpha}{2}$. Trebuie arătat că $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$; este suficient de observat că $\triangle OAB \sim \triangle OCD$.

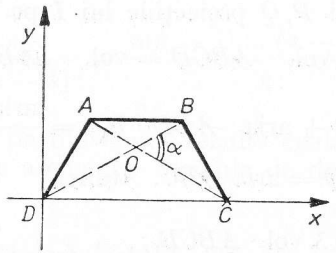


Fig. 4

Soluție analitică: Se aleg axele cu originea în D, ortogonale, segmentul DC fiind pe axa Ox $C(c, 0)$, $A(a, d)$, $B(b, d)$. (BD): $y = \frac{d}{b}x$; (AC): $dx - (a - c)y - cd = 0$.

Atunci coordonatele lui O sînt:

$$x = \frac{bcd}{bd + cd - ad}, \quad y = \frac{cd^2}{bd + cd - ad}$$

$$\text{aria } AOD = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{bcd}{bd + cd - ad} & \frac{cd^2}{bd + cd - ad} & 1 \\ a & d & 1 \end{vmatrix} = \frac{cd^2}{2} \cdot$$

$$\cdot \frac{b - a}{bd + cd - ad} \text{ și aria } BOC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} b & d & 1 \\ \frac{bcd}{bd + cd - ad} & \frac{cd^2}{bd + cd - ad} & 1 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}c\left(d - \frac{cd^2}{bd + cd - ad}\right) = \frac{1}{2}c \cdot \frac{bd^2 - ad^2}{bd + cd - ad},$$

deci aria AOD = aria BOC (Am presupus $d \neq 0$ și $b \neq 0$, $b + c - a \neq 0$; cazurile $b = 0$, $b + c - a = 0$ se refac în mod similar).

30. Fie $(\forall) I \in CD$ și P, Q proiecțiile lui I pe fețele ABC, ABD respectiv. Avem vol. $ABCD$ = vol. $IABC$ + vol. $IABD = \frac{1}{3}$ (aria $ABC \cdot IP$ + aria $ABD \cdot IQ) = \frac{\text{aria } ABC}{3}(IP + IQ)$, deoarece aria ABD = aria ABC. Atunci

$$IP + IQ = \frac{3 \text{ vol} \cdot ABCD}{\text{aria } ABC} \text{ (deci este independent de } I).$$

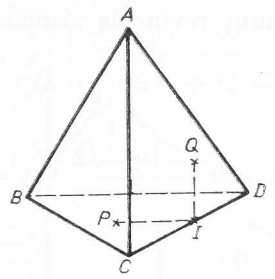


Fig. 5

31. Fie R raza bazei conului și I înălțimea conului. Aria poligonului este $\frac{nR^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$. Raportul respectiv este $\frac{\frac{\pi R^2 I}{3}}{\frac{nR^2}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{n}\right)\cdot\frac{I}{3}} = \frac{2\pi}{n\sin\frac{2\pi}{n}}$ și depinde numai de n.

32. $1 + \cos 6x = 1 + \cos 4x$, $\cos 6x - \cos 4x = 0$, $2\sin 5x \sin x = 0$ și soluția generală este $x = k\frac{\pi}{5}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Soluțiile căutate sînt $x = 0$, $x = \frac{\pi}{5}$, $x = -\frac{\pi}{5}$.

33. Se poate folosi formula

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

După calcule, fracția din enunț rezultă egală cu 2.
(Se poate folosi de asemenea, formula de descompunere a combinărilor.)

34. $X^2 = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Egalitatea din enunț revine la sistemul algebric

$$x^2 - y^2 + x = \frac{1}{4},\quad 2xy + y = 0$$

De-aici rezultă $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$, $y = 0$ și matricile cerute sînt

$$\begin{bmatrix} \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \text{ și } \begin{bmatrix} \dfrac{-1-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-1-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

35. $E = \mathbf{R} \setminus \{x_1, x_2\}$, unde x_1, x_2 sînt rădăcinile (reale) ale numitorului. După calcule, rezultă

$$f'(x) = -\frac{2(2x^2 - 2mx + m^2 - m + 1)}{(2x^2 + 2x - 1 - m^2)^2}$$

Deoarece numărătorul are rădăcini complexe oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, rezultă că $f'(x) < 0$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$, deci f' nu se poate anula și f nu are puncte de extrem.

36. Însumînd progresia de la numărător rezultă

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{(1 + x^n)\cdot(1 - x)} \text{ dacă } x \neq 1,\ x \geqslant 0 \text{ și } f_n(1) = \frac{n+1}{2}.$$

Dacă $0 \leqslant x < 1$, atunci $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Dacă $x > 1$, atunci $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^n\left(\dfrac{1}{x^n} - x\right)}{x^n\left(\dfrac{1}{x^n} + 1\right)(1-x)} = \frac{x}{x-1}$$

deci

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{dacă } 0 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{x}{x-1} & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$; graficul lui f va fi

de forma:

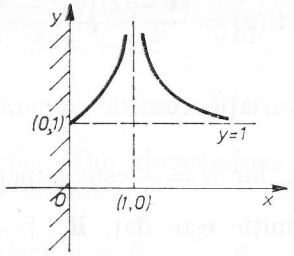


Fig. 6

Integrala cerută este $\int_0^1 \left[\dfrac{1 + x + x^2}{1 + x^2} - 1\right] dx =$

$$= \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\, dx = \frac{\ln 2}{2}.$$

37. Se observă (sau se deduce prin raționament) că $x_1 = 2$
Rădăcinile x_2, x_3 verifică ecuația de gradul doi $x^2 + (2m - 3)x + (3 - m) = 0$, de unde $|x_2 - x_3| = \sqrt{4m^2 - 8m - 3}$.
Egalitatea din enunț (unde $x_2 \neq x_3$, $6m + 5 > 0$) devine
$\log_{10}\sqrt{4m^2 - 8m - 3} = \dfrac{1}{2}\log_{10}(6m + 5)$, de unde se deduc valorile

$m = 4$, $m = -\dfrac{1}{2}$, ambele acceptabile.

38. Condiția de impus asupra lui x este

$$\frac{x^2 - 5x}{x + 4} > 0,\quad \log_7 \frac{x^2 - 5x}{x + 4} > 0,\ \text{deci}\ \frac{x^2 - 5x}{x + 4} > 1$$

Folosind faptul că funcția $\log_a$ ($a > 0$, $a \neq 1$) este strict crescătoare dacă $a > 1$ și strict descrescătoare dacă $0 < a < 1$, rezultă

$$\log_7 \frac{x^2 - 5x}{x + 4} > 1,\ \text{deci}\ \frac{x^2 - 5x}{x + 4} > 7.$$

Rezultă atunci $\dfrac{x^2 - 12x - 28}{x + 4} > 0$ și în final, $x \in (-4, -2) \cup (14, \infty)$.

39. Funcția f este definită pe întreg **R** și după calcule, se obține

$$f'(x) = \frac{(x-2)(4x^2-1)}{(1+x^2)^2}.$$

Din tabloul de variație rezultă că punctele $x = -\frac{1}{2}$, $x = 2$ sînt puncte de minim, iar $x = \frac{1}{2}$ este punct de maxim.

40. Domeniul de definiție este dat, $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$. Derivata funcției f este $f'(x) = 1 - \frac{8}{(x+1)^3}$; $x = -1$ este asimptotă verticală și $y = x$ este asimptotă oblică.
Tabloul de variație este

x	$-\infty$				-1				1				∞
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\|$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		∞	∞	$\searrow$			2	$\nearrow$			∞

graficul are forma

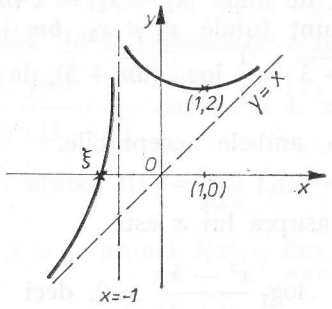


Fig. 7

(Nu se cer f'' și nici intersecția ξ a graficului cu axa Ox). Aria cerută este $S(a) = \int_1^a \frac{4}{(1+x)^2}\,dx = \frac{2a-2}{a+1}$ și $\lim_{a\to\infty} S(a) = 2$.

41. $AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$.

Din faptul că $\triangle ADE \sim \triangle GCE$, rezultă $CG = 2a$.

Din triunghiul ADH rezultă $DH^2 = AD^2 + AH^2 - 2AD \cdot AH \cdot \cos \widehat{DAE} = a^2 + \frac{10a^2}{4} - 2a \cdot \frac{a\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Deci $DH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

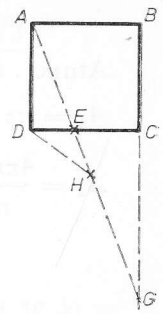


Fig. 8

42. 1) Fie r raza bazei mici. Din asemănarea unor triunghiuri evidente, rezultă

$$\frac{2R-d}{2R} = \frac{r}{R}, \text{ deci } r = R - \frac{d}{2}.$$

Atunci volumul cerut este

$$V = \frac{\pi d}{3}\left[R^2 + \left(R - \frac{d}{2}\right)^2 + R\left(R - \frac{d}{2}\right)\right] = \frac{\pi d}{12}(12R^2 - 6Rd + d^2).$$

2) Condiția cerută este $G = R + r$ (G fiind generatoarea trunchiului de con).

Dar $G^2 = d^2 + (R-r)^2$, deci $G = \frac{d\sqrt{5}}{2}$ și condiția devine $\frac{d\sqrt{5}}{2} = R + R - \frac{d}{2}$, de unde $d = R(\sqrt{5}-1)$.

43. Valorile cerute sînt cele pentru care $\sin 2x - \sqrt{2}\cos x = 0$, deci $2\cos x\left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$, de unde $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sau $x = (-1)^l \cdot \frac{\pi}{4} + l\pi$ cu $k, l \in \mathbf{Z}$.

Apoi $E(x) = \frac{1 - 2\sin^2 x}{2\cos x\left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -\frac{\sin^2 x - \frac{1}{2}}{\cos x\left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} =$

$$= -\frac{\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos x}, \text{ deci } a = -1,\ b = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

44. 1) Avem $PO = OC = r_3$, deci $PT = TB = \sqrt{r_3^2 - r_1^2} = r_2$, iar $BC = 2r_1$.

Raza ρ a bazei conului (care corespunde sferei S_1)este egală cu

$$\rho = \frac{PB \cdot BC}{PC} = \frac{2r_1r_2}{r_3}.$$

Atunci ariile cerute vor fi

$A_1 = \pi\rho \cdot PB = \frac{4\pi r_1 r_2^2}{r_3} = \frac{4\pi r_1 r_2^2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$ și respectiv

$A_2 = \frac{4\pi r_1^2 r_2}{r_3} = \frac{4\pi r_1^2 r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$ (raționînd similar).

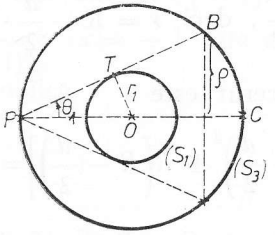


Fig. 9

2) Din relația $A_1 = A_2 \cdot \sqrt{3}$ rezultă $r_2 = r_1\sqrt{3}$. Atunci $\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{r_1}{PT} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, deci $\theta_1 = 30°$; similar $\theta_2 = 60°$ (θ_1, θ_2 fiind unghiurile cerute în enunț).

45. 1) $\triangle ADB \sim \triangle BAC$ deci $\frac{BD}{b} = \frac{AD}{c} = \frac{c}{a}$, de unde rezultă $BD = \frac{bc}{a}$. În mod similar rezultă $CE = \frac{bc}{a}$.

2) Avem aria $ABC = \frac{a \cdot h}{2}$ și aria $BCED = \frac{(a + AD + AE) \cdot h}{2}$.

Deci $\frac{\text{aria } BCED}{\text{aria } ABC} = \frac{a + AD + AE}{a} = \frac{a + \frac{c^2}{a} + \frac{b^2}{a}}{a} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2}$.

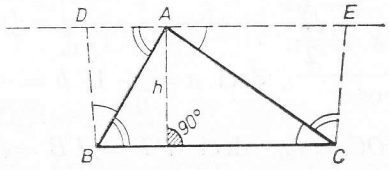


Fig. 10

46. Fie r raza bazei mici. Are loc relația

$4R^2 + (R\sqrt{3} - r)^2 = (R\sqrt{3} + r)^2$, de unde $r = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

Atunci $A_{lat} = \pi(R\sqrt{3} + r)^2 = \frac{16\pi R^2}{3}$.

$Vol. = \frac{\pi \cdot 2R}{3}(3R^2 + r^2 + R\sqrt{3} \cdot r) = \frac{26\pi R^3}{9}$.

47. Deoarece $\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}4x = \frac{\sin 5x}{\cos x \cdot \cos 4x}$ și $\operatorname{tg}2x + \operatorname{tg}3x = \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cdot \cos 3x}$ (pentru $\cos x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$, $\cos 3x \neq 0$, $\cos 4x \neq 0$), ecuația se scrie echivalent $\sin 5x(\cos 2x \cdot \cos 3x - \cos x \cdot \cos 4x) = 0$.

Dacă $\sin 5x = 0$, atunci $x = \frac{k\pi}{5}$ cu $k \in \mathbf{Z}$.

Dacă $\cos 2x \cdot \cos 3x - \cos x \cdot \cos 4x = 0$, atunci $\frac{\cos x + \cos 5x}{2} - \frac{\cos 3x + \cos 5x}{2} = 0$, deci $\cos x - \cos 3x = 0$, adică $\sin x \cdot \sin 2x = 0$, deci $2\sin^2 x \cdot \cos x = 0$ și cum $\cos x \neq 0$ (din ecuația inițială), rezultă $\sin x = 0$, $x = l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$. În final, soluțiile ecuației sînt $\frac{k\pi}{5}$ cu $k \in \mathbf{Z}$ arbitrar.

48. Deoarece $EM = ED$, rezultă $\widehat{EMD} = \widehat{EDM} = \widehat{C}$ și cum $\widehat{DMN} = \widehat{DAC} = 90° - \widehat{C}$, atunci $\widehat{EMN} = 90°$.
Cercul de diametru BD are centrul în E, deci din faptul că $EM \perp MN$ și M este pe cerc, rezultă că MN este tangentă cercului. Similar pentru cercul de diametru DC.
Presupunînd $AB \leqslant AC$ (celălalt caz este analog), rezultă

$$ME = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\left(\frac{BC}{2} - DG\right) \text{ și } NF = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}\left(\frac{BC}{2} + DG\right),$$

deci $ME^2 + NF^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{BC^2}{2} + 2DG^2\right)$, adică relația cerută.

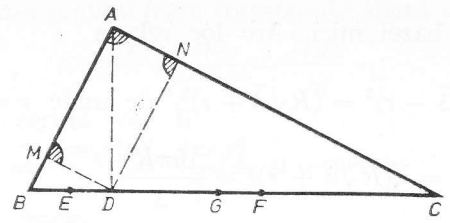


Fig. 11

49. Pentru $n = 1$ trebuie verificat că $\frac{1}{1!} < \frac{3}{2}$, evident. Se presupune afirmația pentru n și se probează pentru $n + 1$, adică $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2n+2}$. Este suficient de arătat că $\frac{5n-2}{2n} + \frac{1}{(n+1)!} \leqslant \frac{5n+3}{2n+2}$, adică $\frac{1}{(n+1)!} \leqslant \frac{5n+3}{2n+2} - \frac{5n-2}{2n} = \frac{1}{n(n+1)}$ ceea ce este clar.

50. $a > 0$, $a \neq 1$ sînt condiții necesare impuse parametrului a. Soluțiile trebuie să satisfacă condiția $x > 0$, $x \neq 1$. Notăm $\log_a x = y$. Ecuația devine $y + (a + y) \cdot \frac{2}{y} = \frac{2a}{y}$, adică $y^2 + 2y = 0$, de unde $y = 0$ sau $y = -2$. Unica soluție acceptabilă este $x = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ și aceasta verifică ecuația în condițiile $a > 0$, $a \neq 1$.

51. Notăm $P(z)$ membrul întîi al ecuației; se pun condițiile $P(2) = 0$, $P'(2) = 0$, $P''(2) = 0$, $P'''(2) \neq 0$ și rezultă un sistem liniar în a, b, c; se obține rezultatul

$$a = \frac{20}{3}, \quad b = 0, \quad c = -\frac{16}{3}.$$

(O altă metodă: $P(z) \vdots (z-2)^3$, $P(z) \not\vdots (z-2)^4$ etc.). Înlocuind valorile lui a, b, c ecuația devine $3z^5 - 15z^4 + 20z^3 - 16 = 0$ sau $(z-2)^3 \cdot (3z^2 + 3z + 2) = 0$, de unde $z_{1,2,3} = 2$, $z_{4,5} = \frac{-3 \pm i\sqrt{15}}{6}$.

52.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x+1) - 1}{\ln^2(x+1)} & \text{dacă } x > -1 \\ \dfrac{\ln(-x-1) - 1}{\ln^2(-x-1)} & \text{dacă } x < -1 \end{cases}, \quad \text{pentru } x \neq 0, -2.$$

Graficul are asimptotele verticale $x = -2$, $x = 0$ și nu are alte asimptote.
Tabloul de variație:

x	$-\infty$		$-e-1$		-2		-1		0		$e-1$		∞
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$\|$	$-$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$	$-\infty$		∞ $\|$ $-\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	∞ $\|$ $-\infty$		e	$\nearrow$	∞

Graficul are următoarea formă:

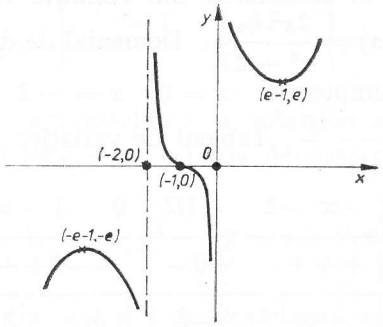


Fig. 12

53. Funcția f este continuă pe $[-1, \infty)$ și este derivabilă în punctele intervalului $[-1, \infty)$, cu excepția lui $x = -1$ și $x = 0$. Volumul cerut este

$$V = \pi \int_{-1}^{1} f(x)^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} (2 + x - 2\sqrt{1+x}) \, dx = \frac{\pi}{3}(12 - 8\sqrt{2}).$$

54. Expresia are sens pentru $x > 0$, $x \neq 1$. Notăm $\log_4 x = y$.

1) Ecuația devine $y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$, de unde $2y^2 - 5y + 2 = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = \frac{1}{2}$. Rezultă soluțiile $x_1 = 16$, $x_2 = 2$.

2) Inecuația devine $y + \frac{1}{y} < \frac{5}{2}$, adică $y(2y^2 - 5y + 2) < 0$, de unde $y \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ și $x \in (0,1) \cup (2, 16)$.

55. x este un număr natural și $7x \geqslant x^2 + 10$, deci $x \in \{2, 3, 4, 5\}$. Așadar, x poate lua doar patru valori. Ecuația are soluția $x = 4$.

56. Ecuația se scrie $(x - 7)(x^2 - 3) = 0$ și are rădăcinile $x_1 = 7$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$.

57. Nedeterminare de tipul 1^∞. Limita respectivă este egală cu

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\frac{2n+\sqrt{n}+3}{2n+1} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2\sqrt{n}}{2n+1}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

58. 1) Parametrul a se determină din condiția $f(1) = 1$ și rezultă $a = 2$. Așadar, $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 2x}$. Domeniul de definiție este $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, -2\}$. Asimptotele: $x = 0$, $x = -2$, $y = 2$. Derivata $f'(x) = \frac{2(2x^2 - x - 1)}{(x^2 + 2x)^2}$. Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-2		$-1/2$		0		1		∞
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	2	$\nearrow$	∞	$\nearrow$	-2	$\searrow$	∞	$\searrow$	2	$\nearrow$	2

2) Aria cerută este $A = \int_1^2 \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 2x}\,dx = \int_1^2 \left[2 - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{x+2} - \frac{1}{x}\right)\right] dx = 2x - \frac{1}{2}[9\ln(x+2) - \ln x]\Big|_1^2 = 2 + \frac{9}{2}\ln 3 - \frac{17}{2}\ln 2$

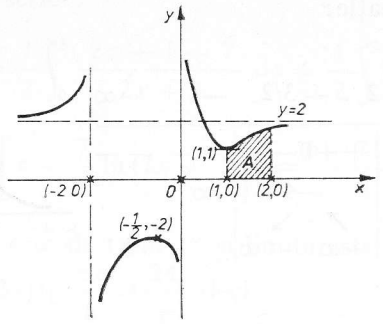


Fig. 13

59. $y = 3 - 2x$; prima ecuație devine $x^3 + (3 - 2x)^3 = 7$, adică $7x^3 - 36x^2 + 54x - 20 = 0$ și admite rădăcina $x_1 = 2$. Soluțiile sistemului vor fi

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{11 + \sqrt{51}}{7} \\ y = \frac{-1 - 2\sqrt{51}}{7} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{11 - \sqrt{51}}{7} \\ y = \frac{-1 + 2\sqrt{51}}{7} \end{cases}.$$

60. Domeniul de admisibilitate a soluțiilor: $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq 2$. Notînd $\log_2 x = y$, ecuația devine

$$\frac{4}{y} - \frac{1}{y-1} = 1, \text{ adică } y^2 - 4y + 4 = 0, \text{ de unde } y = 2 \text{ și } x = 4.$$

61. Punînd condiția ca 1 și 2 să fie rădăcini, rezultă $m = -2$, $n = 4$. Rădăcinile $x_{3,4}$ verifică ecuația $x^2 + 2x + 2 = 0$, deci $x_{3,4} = -1 \pm i$.

62. Asimptotele: $x = -1$, $x = -2$, $y = 0$.

Derivata: $f'(x) = -\frac{2x + 3}{(x^2 + 3x + 2)^2}$, $x \neq -1, -2$.

Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-2		$-3/2$		-1		∞
$f'(x)$	$++++$		$++0$		$--$		$----$		
$f(x)$		$\nearrow$	∞	$\nearrow$	-4	$\searrow$	∞	$\searrow$	
	0		$-\infty$		$-\infty$				0

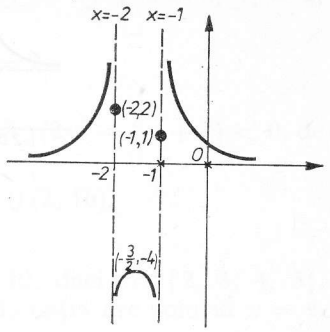


Fig. 14

Graficul este în figura 14.

63. 1) Evident, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1+m$; rezultă $m=2$.

2) $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1 (x\sqrt{1+x^2}+2x^2)\,dx=\left[\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}+\right.$

$$\left.+\frac{2x^3}{3}\right]\Big|_0^1=\frac{2\sqrt{2}+1}{3}.$$

64. Avem $x_1+x_2=m+3$, $x_1x_2=-m$ și condiția din enunț devine $(m+3)^2+2m<42$, $m^2+8m-33<0$, deci $m\in(-11,3)$.

65. $y=2-x$, $|x|+|2-x|=12$.

Dacă $x\leqslant 0$, ecuația devine $-x+2-x=12$, deci $x=-5$. Dacă $0<x\leqslant 2$, atunci se obține $x+2-x=12$, ecuație imposibilă, iar dacă $x>2$, ecuația devine $x+(x-2)=12$, deci $x=7$. Soluțiile sistemului sînt $x=-5$, $y=7$; $x=7$, $y=-5$.

66. Notăm $3^x=y$ și ecuația devine $3y+y=108$, $y=27$, de unde $x=3$.

67. 1) Funcția f este pară și este suficient de trasat graficul pentru $x\geqslant 0$, adică pentru $f(x)=\dfrac{x-3}{2x+1}$ și apoi de considerat simetricul acestuia față de axa ordonatelor etc.

2) Integrala se scrie

$$\int_0^3\frac{x-3}{2x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^3\frac{2x+1-7}{2x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^3\left(1-\frac{7}{2x+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{7}{2}\ln(2x+1)\right]\Big|_0^3=\frac{6-7\ln 7}{4}.$$

68. Nedeterminarea este de tipul 1^∞ și limita este egală cu $l=e^\alpha$ unde $\alpha=\lim\limits_{x\to 4}(12-3x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{8}=\dfrac{24}{\pi}$ deci

$$l=e^{24/\pi}.$$

69. $BB'\perp DC$; $B'C=\dfrac{a-b}{2}$, $DB'=\dfrac{a+b}{2}$, $BB'=\dfrac{1}{2}\sqrt{3b^2+2ab-a^2}$ și $DB=AC=\sqrt{DB'^2+BB'^2}=\sqrt{b^2+ab}$. Raza R a cercului circumscris trapezului este egală cu raza cercului circumscris ΔABC. Aria acestui triunghi este $S=\dfrac{1}{2}\ AB\cdot BB'=$

$$=\frac{b}{4}\sqrt{3b^2+2ab-a^2},\quad\text{deci}\quad R=\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S}=$$

$$=\frac{b\sqrt{b^2+ab}}{\sqrt{3b^2+2ab-a^2}},\ (b<a<3b).$$

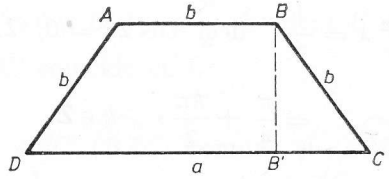


Fig. 15

70. Notăm $DC=2x$; atunci $BD=R+x$, $BC=R-x$, $AB^2=$ $=R^2-x^2$, deci $AD^2=AB^2+BD^2=2R^2+2Rx$, $AC^2=AB^2+$ $+BC^2=2R^2-2Rx$.

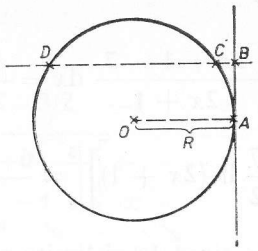


Fig. 16

Relația de verificat devine $\frac{2R^2+2Rx+2R^2-2Rx}{2R^2+2Rx-2R^2+2Rx}=\frac{2R}{2x}$ și este evidentă.

71. $\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x\pm\cos x)$; ecuația devine $\sin^4 x+\frac{1}{4}(\sin x+\cos x)^4+\frac{1}{4}(\sin x-\cos x)^4=\frac{5}{4}$, adică $\sin^4 x+\frac{1}{4}(1+2\sin x\cos x)^2+\frac{1}{4}(1-2\sin x\cos x)^2=\frac{5}{4}$, $\sin^4 x+\frac{1}{4}(2+8\sin^2 x\cos^2 x)=\frac{5}{4}$, $4\sin^4 x+2+8\sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x)=5$, $4\sin^4 x-8\sin^2 x+3=0$, $\sin^2 x=\frac{4\pm 2}{4}$. Se poate accepta numai soluția $\sin^2 x=\frac{1}{2}$, deci $\cos 2x=0$, $2x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

72. $\left(\frac{1+\mathrm{i}\operatorname{tg}x}{1-\mathrm{i}\operatorname{tg}x}\right)^n=\left(\frac{\cos x+\mathrm{i}\sin x}{\cos x-\mathrm{i}\sin x}\right)^n=\frac{\cos nx+\mathrm{i}\sin nx}{\cos nx-\mathrm{i}\sin nx}=\frac{\operatorname{ctg}nx+\mathrm{i}}{\operatorname{ctg}nx-\mathrm{i}}$.

73. 1) Piramida are baza $BCC'B'$ și vîrful A. Înălțimea din A a piramidei este tocmai AD ($D\in BC$, $AD\perp BC$).

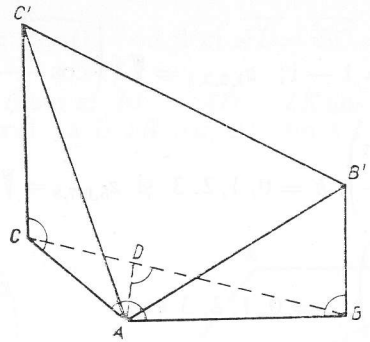


Fig. 17

Avem $V=\frac{\text{aria } BCC'B'\cdot AD}{3}=\frac{(BB'+CC')\cdot BC\cdot AD}{6}$, deci $\frac{V}{BB'+CC'}=\frac{BC\cdot AD}{6}=\frac{1}{3}$ aria ABC și nu depinde de B', C'.

2) $\cos\widehat{B'AC'}=\frac{AB'^2+AC'^2-B'C'^2}{2AB'\cdot AC'}=$

$=\frac{(AB^2+BB'^2+AC^2+CC'^2)-[BC^2+(CC'-BB')^2]}{2AB'\cdot AC'}=\frac{BB'\cdot CC'}{AB'\cdot AC'}$,

deci $\cos\widehat{B'AC'}\geqslant 0$ și $\widehat{B'AC'}\leqslant\frac{\pi}{2}$. Evident $\widehat{B'AC'}=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow B'$ coincide cu B sau C' coincide cu C.

74. $\triangle AMN\sim\triangle ABC$ ($\widehat{BAC}$ comun și $\widehat{AMN}=\widehat{ACB}$). Atunci $\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AC}=\frac{1}{2}$, deoarece $AM=\frac{AC}{2}$.

75. $2\cos 2x\cos x=2\cos 6x\cos x\Rightarrow\cos x\cdot(\cos 6x-\cos 2x)=0$, $\sin 4x\cdot\sin 2x\cdot\cos x=0$, $x=\frac{k\pi}{4}$ ($k\in\mathbf{Z}$).

76. $z^4 = 1 + i$, $z^4 = 1 - i$; $z_{1,2,3,4} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$ și $z_{5,6,7,8} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{4}+2l\pi}{4} - i\sin\dfrac{\frac{\pi}{4}+2l\pi}{4}\right)$, $l = 0, 1, 2, 3$ etc.

77. $\left(\dfrac{VH'}{VH}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$, $\dfrac{VH'}{VH} = \dfrac{1}{2}$, deci $VH' = 4$ cm și $HH' = 4$ cm. (Notațiile sînt evidente.)

78. Aria totală = Aria lat. cil. $ABB'A'$ + 2 Aria lat. tr. con $BCC'B'$ + + 2 Aria lat. con $CDC' = 2\pi \cdot BD \cdot AB + 2\pi \cdot BC\left(BD + \dfrac{CC'}{2}\right) + 2\pi \cdot CD \cdot \dfrac{CC'}{2} = 2\pi \cdot a\sqrt{3} \cdot a + 2\pi a\left(a\sqrt{3} + \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right) + \pi a \cdot a\sqrt{3} = 6\pi a^2\sqrt{3}$.

Volumul = Vol. cil. $ABB'A'$ + 2 Vol. tr. con $BCC'B'$ − 2 Vol. con $CDC' = \pi \cdot BD^2 \cdot AB + 2\pi\dfrac{a}{6}\left(BD^2 + \dfrac{CC'^2}{4} + BD \cdot \dfrac{CC'}{2}\right) - 2\pi\dfrac{CC'^2}{4} \cdot \dfrac{a}{6} = \dfrac{9\pi a^3}{2}$.

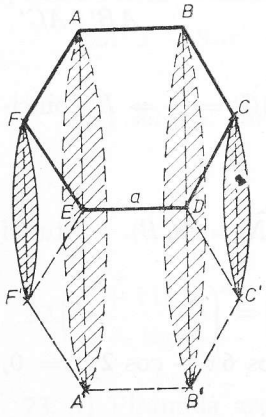


Fig. 18

79. Fie ABC triunghiul considerat și $BC = 2$, $AC = \sqrt{2}$, $AB = 1 + \sqrt{3}$.

Atunci $\cos\hat{A} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, deci $\hat{A} = 45°$; $\cos\hat{B} = \dfrac{AB^2 + CB^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ deci $\hat{B} = 30°$. Apoi $\hat{C} = 105°$.

80. Avem $\widehat{AiB} = 2\alpha$, $\widehat{CmD} = 6\alpha$ deci $\widehat{AD} = \widehat{BC} = 180° - 4\alpha$ ($\widehat{v}$ este măsura arcului v).

Atunci $AB = 2R \sin\alpha$, $BC = AD = 2R\cos 2\alpha$, $CD = 2R \sin 3\alpha$ și perimetrul cerut va fi $2R\,(\sin\alpha + \sin 3\alpha + 2\cos 2\alpha)$.

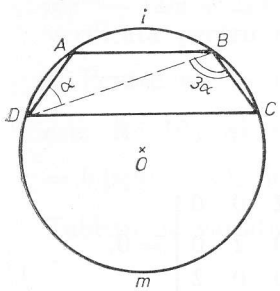


Fig. 19

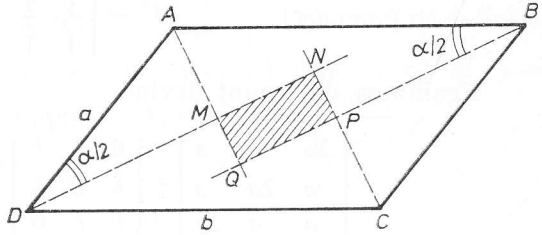


Fig. 20

81. Deoarece $\widehat{BAD} + \widehat{ADC} = 180°$, rezultă că $\widehat{MAD} + \widehat{ADM} = 90°$, deci $\widehat{AMD} = 90°$ etc. Patrulaterul $MNPQ$ este un dreptunghi.

Apoi $MN = DN - DM = BQ - DM = b\cos\dfrac{\alpha}{2} - a\cos\dfrac{\alpha}{2}$ și $MQ = AQ - AM = b\sin\dfrac{\alpha}{2} - a\sin\dfrac{\alpha}{2}$. Atunci aria $MNPQ = (b-a)^2 \sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{(b-a)^2}{2}\sin\alpha$.

82. $4\sin x + (1 - 2\sin^2 x) = 1$, $2\sin x(2 - \sin x) = 0$. Se poate accepta numai $\sin x = 0$, $x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

83. Dacă rotirea se face în jurul unei laturi de lungime a se obține: Aria totală$_1 = 2\pi ba + 2\pi b^2$ și vol$_1 = \pi b^2 a$.

În celălalt caz, aria totală$_2 = 2\pi ab + 2\pi a^2$ și vol$_2 = \pi a^2 b$.

Rapoartele cerute sînt $\dfrac{2\pi b(a+b)}{2\pi a(b+a)} = \dfrac{b}{a}$ și $\dfrac{\text{vol}_1}{\text{vol}_2} = \dfrac{b}{a}$.

84. Condiția impusă lui a este $a > 0$, $a \neq 1$. Necunoscuta x verifică condiția $x > 0$, $x \neq 1$. Se notează $\log_a x = y$.

Ecuația dată devine $y + (2a + y) \cdot \frac{1}{y} = a \cdot \frac{2}{y}$, adică $y^2 + y = 0$. Deoarece $y \neq 0$ (căci $x \neq 1$), rezultă $y = -1$, deci $x = \frac{1}{a}$.

85. Avem

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Egalitatea din enunț devine

$$\begin{bmatrix} 2a & a & a \\ a & 2a & a \\ a & a & 2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 0,$$

adică

$$\begin{bmatrix} 2a+2 & a+b & a+b \\ a+b & 2a+2 & a+b \\ a+b & a+b & 2a+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Așadar, $2a + 2 = 0$, $a + b = 0$, deci $a = -1$, $b = 1$.

86. *a*) Avem $x_1 + x_2 + x_3 = -m$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1$. Atunci $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = m^2 - 2$ și condiția din enunț devine $m^2 - 2 = 7$, de unde rezultă $m_1 = -3$, $m_2 = 3$.

b) Cum $m \in \mathbf{Z}$, rădăcina întreagă este $+1$ sau -1, adică este printre divizorii termenului liber. Dacă rădăcina este $x = 1$, atunci se deduce $m = -1$ și ecuația devine $(x - 1)(x^2 + 1) = 0$ și admite rădăcina întreagă 1 și rădăcinile complexe $\pm i$. Dacă rădăcina întreagă ar fi $x = -1$, atunci s-ar deduce $m = 3$ și ecuația devine $(x + 1)(x^2 + 2x - 1) = 0$ și admite numai rădăcini reale, caz care nu convine. Se acceptă deci numai valoarea $m = -1$.

87. *a*) Condiția din enunț revine la faptul că ecuația $me^x - (m + 1)e^{-x} = 0$, adică $e^{2x} = \frac{m+1}{m}$ are rădăcini reale și nenule, adică $\frac{m+1}{m} > 0$, deci $m \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$.

b) După calcule, rezultă $f'(x) = \frac{2m + 2 - me^x - (m+1)e^{-x}}{(e^x - 1)^2}$, $x \neq 0$. Așadar $f'(x) = -\frac{me^{2x} - (2m+2)e^x + m + 1}{e^x(e^x - 1)^2}$; condiția necesară ca f să fie descrescătoare este $f'(x) \leqslant 0$, $(\forall)\ x \neq 0$, adică $me^{2x} - (2m + 2)e^x + m + 1 \geqslant 0$ $(\forall)\ x \neq 0$ și condiția nu este verificată pentru nici o valoare a parametrului real m.

c) Pentru $m = -1$ avem $f(x) = -\frac{e^x}{e^x - 1}$. Domeniul de definiție este $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ și dreptele $x = 0$, $y = -1$ (spre $+\infty$) și $y = 0$ (spre $-\infty$) sînt asimptote. Apoi $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$.

Tabloul de variație este:

x	$-\infty$		0		∞
f'	$+$ $+$ $+$ $+$		$\|$	$+$ $+$ $+$ $+$	
f	0 ↗	$+\infty$	$\|$	$-\infty$ ↗	-1

și graficul:

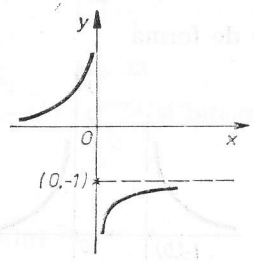


Fig. 21

88. x este întreg și $x \geqslant 3$. Se folosesc formulele:

$$C_x^1 = x,\ C_x^2 = \frac{x(x-1)}{2};\quad C_x^3 = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}.$$

Ecuația din enunț devine, după calcule, $x^3 - x^2 + 2x - 110 = 0$ și admite rădăcina întreagă $x_1 = 5$.

Celelalte rădăcini vor fi date de ecuația $x^2 + 4x + 22 = 0$ și sînt complexe; se poate accepta numai soluția $x = 5$.

89. Egalitatea din enunț conduce la relațiile $m = a^2 + bc$, $n = ab + bd$, $p = ac + cd$, $q = bc + d^2$.
Trebuie probat că $(n - m) + (q - p) = 2(p - n)$, adică $3p - 3n + m - q = 0$. Din ipoteză rezultă că există r astfel încît $b = a + r$, $c = a + 2r$, $d = a + 3r$. Deci $m = a^2 + bc = 2a^2 + 3ar + 2r^2$ și similar, $n = 2a^2 + 5ar + 3r^2$, $p = 2a^2 + 7ar + 6r^2$, $q = 2a^2 + 9ar + 11r^2$; se deduce că $3p - 3n + m - q = 0$, ceea ce trebuia.

90. a) Domeniul de definiție al lui f este dat în enunț.
Dreptele $x = 0$, $x = -1$ sînt asimptote verticale, iar $y = 0$ asimptotă orizontală. Derivata

$$f'(x) = -\frac{2x + 1}{x^2(x + 1)^2}$$ se anulează în punctul $x = -\frac{1}{2}$.

Tabloul de variație: (nu se cere f'')

x	$-\infty$			-1			$-\frac{1}{2}$		0			∞
$f'(x)$	+	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−	−
$f(x)$	0	↗		∞	$-\infty$ ↗		-4	↘	$-\infty$	∞	↘	0

Graficul cerut este de forma

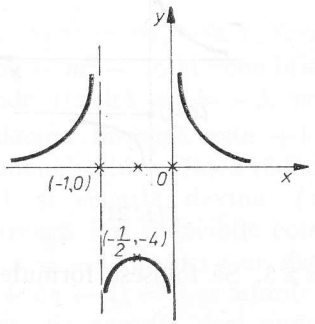


Fig. 22

b) Avem $f(1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, ... $f(n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ și limita cerută este egală cu $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

91. *a*) Pe intervalele $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$ funcția f este continuă (fiind elementară); în punctul $x = 1$, limitele laterale ale lui f există dar sînt distincte, deci punctul $x = 1$ este o discontinuitate pentru f.

b) Pe intervalul $(-\infty, 1)$ funcția este constantă, $f = 0$, iar pe intervalul $(1, \infty)$, avem $f'(x) = -e^{-x+1}$; tabloul de variație pe $(1, \infty)$ este

x	1		∞
$f'(x)$	−	−	−
$f(x)$	1	↘	0

iar graficul are forma:

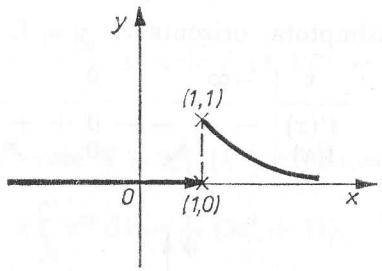


Fig. 23

c) Integrantul este $(x - 1) \cdot e^{-x+1}$ și integrînd prin părți se obține rezultatul $1 - \frac{2}{e}$.

92. Determinantul sistemului

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a + 2)(a - 1)^2$$ se

anulează pentru $a = -2$, $a = 1$. Sistemul admite soluție unică pentru $a \neq -2$, $a \neq 1$ și această soluție este:
$x = -\frac{a+1}{a+2}$, $y = \frac{1}{a+2}$, $z = \frac{(a+1)^2}{a+2}$. Se acceptă și soluții directe, elementare (fără determinanți).

93. Se pun condițiile $f(-2)=0$, $f(1)=6$, $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{25}{4}$, $a<0$ și rezultă $a=-1$, $b=1$, $c=6$ sau $a=-\frac{4}{9}$, $b=\frac{14}{9}$, $c=\frac{44}{9}$.

94. $x_1+x_2=1$, $x_1x_2=p$. Avem $x_1^3+x_2^3=1-3p$, $x_1^2+x_2^2=1-2p$ și egalitatea din enunț devine $(1-3p)^2+(1-2p)=4p+2$, de unde $p=0$ sau $p=\frac{4}{9}$.

95. $f'(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}$ pentru $x\neq 0$. Funcția f este derivabilă pe $\mathbf{R}$ ($f'(0)=0$). Asimptota orizontală: $y=1$. Tabloul de variație:

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

graficul:

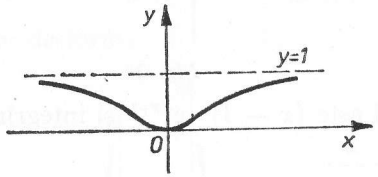


Fig. 24

96. 1) $f'(x)=\frac{x^2-2ax-2ab-5}{(x-a)^2}$. Din condiția din enunț rezultă $a=1$, $b=-1$.

2) $\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\frac{x^2-2x+5}{x-1}\,dx=\int_2^3\left(x-1+\frac{4}{x-1}\right)dx=$

$=\left(\frac{x^2}{2}-x+4\ln|x-1|\right)\Big|_2^3=\frac{3}{2}+4\ln 2.$

97. Discriminantul ecuației este $\Delta=(5-m)^2-4(5-m^2)=5m^2-10m+5=5(m-1)^2\geq 0$.

Condiția din enunț se scrie $\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}<0$ și cum $x_1, x_2\in\mathbf{R}$, rezultă $x_1x_2<0$, deci $5-m^2<0$, de unde $m\in(-\infty,-\sqrt{5})\cup\sqrt{5},\infty)$.

98. Notînd $2^n=z$, rezultă $z^2-z-240=0$, de unde $z_{1,2}=\frac{1\pm 31}{2}$.

Se poate accepta doar $z=16$, $n=4$; termenul cerut va fi $T_3=6\sqrt[3]{x}$.

99. Condiția secundă este o identitate (valabilă pentru orice matrici pătratice de același ordin). Scriind că $AB=BC$ se obține $\alpha=-\frac{1}{2}$.

100. Avem $f'(0)=\frac{-3+2a}{9}$ și scriind că $f'(0)=1$, rezultă $a=6$ etc.

101. Volumul respectiv este $\mathbf{V}=\pi\int_0^1(x+e^x)^2dx=\pi\int_0^1 x^2dx+$

$+2\pi\int_0^1 xe^x\,dx+\pi\int_0^1 e^{2x}\,dx=\frac{\pi}{6}(3e^2+11)$.

102. Avem $E(x)=4(\sin^2\frac{\pi}{3}-\sin^2 x)$, deci

$$E(x)=4\left(\sin\frac{\pi}{3}+\sin x\right)\cdot\left(\sin\frac{\pi}{3}-\sin x\right)=4\cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{3}+x}{2}\cdot$$

$$\cos\frac{\frac{\pi}{3}-x}{2}\cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{3}-x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3}+x}{2},\text{ deci}$$

$E(x)=4\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ și astfel, $n=4$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

103. Înlocuim $\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$ și $\operatorname{ctg}^2x=\frac{1}{\operatorname{tg}^2x}$.

După calcule, rezultă $E=1$, pentru orice x din domeniul de definiție al lui E.

104. Condiția impusă asupra lui α este

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \neq 0, \text{ adică } (\alpha+2)(\alpha-1)^2 \neq 0, \text{ deci } \alpha \neq -2 \text{ și } \alpha \neq 1.$$

Soluția respectivă este tripletul (x, y, z), unde

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha & 1 \\ 3 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{(\alpha+2)(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha-4}{(\alpha+2)(\alpha-1)} \text{ și similar,}$$

$$y = \frac{2}{\alpha+2}, \quad Z = \frac{3\alpha}{(\alpha-1)(\alpha+2)}.$$

105. *a)* $E(x, y) = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{3y^2}{4} - y + 1\right)$

și avem o sumă de numere reale pozitive, unul fiind strict pozitiv, deci $E(x, y) > 0$, $(\forall) x, y$.

b) După calcule, egalitatea din enunț devine

$$(4a - 2b)x + (4b - 2a)y + (4a^2 - 4ab + 4b^2 - 2b) = 0.$$

Dacă $a = b = 0$, atunci este evident că această egalitate are loc pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$.
Reciproc, se va deduce că au loc relațiile

$4a - 2b = 0$, $4b - 2a = 0$, $4a^2 - 4ab + 4b^2 - 2b = 0$, deci $a = b = 0$.

106. Vezi problema 45.

107. 1) Conform ipotezei avem $b < a$. Fie h_1, h_2 distanțele de la 0 la bazele AB și DC respectiv. Cum $\triangle AOB \sim \triangle COD$, rezultă $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b}$. De aici și din relația $h_1 + h_2 = h$, rezultă

$$h_1 = \frac{a \cdot h}{a+b}, \quad h_2 = \frac{b \cdot h}{a+b}.$$

2) Avem $V_1 = \frac{\pi h^2}{3}(2a + b)$ și $V_2 = \frac{\pi h^2}{3}(a + 2b)$, după calcule.

Deoarece $b < a$, rezultă $V_1 > V_2$.

108. Fie A' mijlocul lui BC, deci $AA' = \sqrt{AC^2 - A'C^2} = 4$ cm. Atunci aria $ABC = 12$ cm^2.

Raza cercului circumscris este $R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \text{ aria } ABC} = \frac{25}{8}$ cm.

(Se poate de asemenea nota O centrul acestui cerc și $OA = R$; din $\triangle OA'C$ se obține $(4 - R)^2 + 9 = R^2$ etc.).

109. 1) Fie h_c înălțimea din C a triunghiului ABC. Distanța de la G la AB va fi egală cu $\frac{1}{3} h_c$. Atunci

$$\frac{\text{aria } MGN}{\text{aria } ABC} = \frac{MN \cdot \frac{1}{3} h_c}{AB \cdot h_c} = \frac{1}{6}.$$

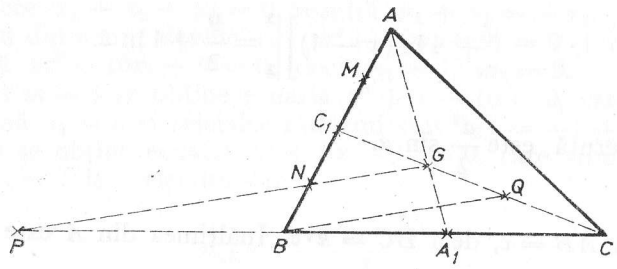


Fig. 25

2) Fie $BQ \| PG$, $Q \in GC$. Deoarece $BN = NC_1$, rezultă $C_1G = GQ$ (în triunghiul C_1BQ) și cum G este centrul de greutate al triunghiului ABC, rezultă $GQ = QC$ și atunci din triunghiul CPG, va rezulta $PB = BC$.

110. Este necesar $x \geq 3$, x întreg. Ecuația se scrie:

$3 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{6} = x$ și se poate accepta numai soluția $x = 3$.

111. În mod necesar, $x \geq 0$. Ecuația se scrie $3^{x+1} = 3^{2\sqrt{x}}$ de unde $x + 1 = 2\sqrt{x}$, $(\sqrt{x} - 1)^2 = 0$ și se obține $x = 1$.

112. Ecuația are și rădăcina $x_3 = -i$ și membrul stîng este divizibil cu $(x - 1)(x - i)(x + i) = x^3 - x^2 + x - 1$. Se obține $a = 2$, $b = -3$, $c = 4$. Celelalte rădăcini verifică $x^2 - x - 4 = 0$, deci,

$$x_{4,5} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

113. $f'(x) = \ln\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{x}\right) + \frac{e}{x - e}$. Atunci $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = \ln \frac{1}{e} = -1$.

114. Scriind că $f(2) = 8$, $f'(2) = -8$ se obține $a = 1$, $b = 2$. Aria cerută este

$$A = \int_2^3 \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}\,dx = \int_2^3 \left(x + 2 + \frac{4}{x - 1}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x + 4 \ln (x - 1)\right]\Bigg|_2^3 = \frac{9}{2} + 4 \ln 2.$$

115. Aria cerută este $\frac{d^2}{2} \sin \alpha$.

116. Notăm $AB = c$, deci $BC = k \cdot c$. Înălțimea din A este

$\sqrt{c^2 - \frac{k^2c^2}{4}} = \frac{c}{2}\sqrt{4 - k^2}$ și ca atare, $S = \frac{kc^2}{4}\sqrt{4 - k^2}$, de unde $c = \sqrt{\frac{4S}{k\sqrt{4 - k^2}}}$. Perimetrul cerut este $2c + kc$ etc.

117. Membrul stîng al relației se scrie $\frac{2 \sin x \cos 3x}{2 \sin 3x \cos x} = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} 3x$. Atunci în mod necesar $a = 1$.

118. $\frac{a + c}{b} = \frac{2R \sin A + 2R \sin C}{2R \sin B} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin B} =$

$= \frac{2 \sin \frac{A + C}{2} \cos \frac{A - C}{2}}{2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}} = \frac{\cos \frac{A - C}{2}}{\sin \frac{B}{2}}$. Relația din enunț devine: $\cos \frac{A - C}{2} = \cos \frac{B}{2}$, deci $\frac{A - C}{2} \pm \frac{B}{2} = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, de unde $A - C + B = 0$ sau $A - C - B = 0$, adică $C = \frac{\pi}{2}$ sau $A = \frac{\pi}{2}$.

119. Notăm $CC_1 = x$. Atunci din triunghiul ACC_1 rezultă $x + 10 \pm \pm \sqrt{100 + x^2} = 60$, de unde $x = 24$ cm. Volumul cerut va fi $8 \cdot 6 \cdot 24 = 1\,152$ cm^3.

120. Deoarece $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ rezultă $x_1 + x_2 = -x_3$.
Relația din enunț devine $x_3 \cdot (m^2 - 10m + 9) = 0$ și cum $x_3 \neq 0$, rezultă $m^2 - 10m + 9 = 0$, deci $m_1 = 1$, $m_2 = 9$.
Pentru $m = 1$ se obține ecuația $x^3 + x - 10 = 0$, care admite o rădăcină $x_1 = 2$ și celelalte rădăcini sînt $x_{2,3} = -1 \pm 2i$. Pentru $m = 9$ se obține ecuația $x^3 + 9x - 10 = 0$, care admite o rădăcină $x_1 = 1$ iar celelalte sînt

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{39}}{2}.$$

121. Se pune condiția că $x_1 = -2$ este rădăcină și rezultă $m = \frac{6}{5}$. Ecuația devine $5x^3 + 9x^2 - 9x - 14 = 0$ și admite rădăcina $x_1 = -2$. Celelalte rădăcini sînt date de ecuația $5x^2 - x - 7 = 0$ și sînt $x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{141}}{10}$.

122. Inecuația se scrie echivalent $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1} < 0$ (pentru $x \neq 1, -1$).
Soluția cerută este $x \in (-1, 1) \cup (2, 3)$.

123. Relațiile lui Viéte sînt $x_1 + x_2 = -m - 2$, $x_1x_2 = \frac{m^2 + 4m + 3}{2}$.

a) Condiția din enunț revine la $-m - 2 = m$, deci $m = -1$;

b) Trebuie determinat m astfel ca $\left|-m - 2 + \frac{3(m^2 + 4m + 2)}{2}\right| < 1$, adică $|3m^2 + 10m + 5| < 2$. Așadar, $-2 < 3m^2 + 10m + 5 < 2$ și rezultă $m \in \left(-3, -\frac{7}{3}\right) \cup \left(-1, -\frac{1}{3}\right)$.

124. Se observă (sau se deduce prin raționament) că ecuația admite rădăcina $x_1 = 3$. Ecuația se scrie echivalent $(x - 3)(x^2 - 2ax + a^2) = 0$, deci rădăcinile ei sînt $x_1 = 3$ și $x_{2,3} = a$.

125. Se notează $2^x = y$ și ecuația devine $\frac{y^2}{4} - y = 8$, $y^2 - 4y - 32 = 0$. Rădăcinile sînt $y_1 = 8$, $y_2 = -4$ și soluția acceptabilă este $x = 3$.

126. Dacă $x \in [0, \pi]$, atunci ecuația devine $2 \sin x = 2 \cos x$, deci $\operatorname{tg} x = 1$ și rezultă $x = \frac{\pi}{4}$. Dacă $x \in (\pi, 2\pi]$, ecuația se scrie $\cos x = 0$ și are soluția $x = \frac{3\pi}{2}$.

127. a) Fie I intersecția diagonalelor. Aria $ABCD = \frac{1}{2}(AI \cdot BI + BI \cdot CI + CI \cdot DI + DI \cdot AI) = \frac{1}{2}(AI + CI)(BI + DI) = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$.

b) $AB^2 + DC^2 = (AI^2 + BI^2) + (DI^2 + CI^2) = (AI^2 + DI^2) + (BI^2 + CI^2) = AD^2 + BC^2$.

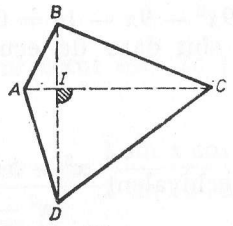


Fig. 26

128. *a*) Din relațiile lui Viéte rezultă $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -5m - 5$.
Atunci $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 10m + 10$ și relația din enunț devine $10m + 10 = 20$, de unde $m = 1$.
b) Ecuația este $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$, deci este bipătrată și are rădăcinile $1, -1, 3, -3$.

129. Fie $x_1 = 1 + i$; ecuația are și rădăcina $x_2 = 1 - i$.
Membrul I al ecuației se împarte exact cu $x^2 - 2x + 2$ și deci restul împărțirii este identic nul.
Va rezulta $a = -10$, $b = 18$ și celelalte rădăcini vor fi

$$x_{3,4} = -2 \pm i\sqrt{5}.$$

130. a) Dacă $m = \frac{1}{3}$, rezultă $\sin 2x = \frac{1}{2}$, deci $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) Din ecuație rezultă $m \neq -1$ și $\sin 2x = \frac{1 - m}{1 + m}$ și se pune condiția ca $-1 \leqslant \frac{1 - m}{1 + m} \leqslant 1$, adică $\left(\frac{1 - m}{1 + m}\right)^2 \leqslant 1$, deci $m \geqslant 0$.

131. Avem $\widehat{BC'C} = \widehat{BB'C} = 90°$, deci patrulaterul $BC'B'C$ este inscriptibil. Atunci $\widehat{AC'B'} = \widehat{ACB}$ (au același suplement). Apoi $\widehat{ACB} = \widehat{T'AB} = \text{măs}\frac{\widehat{AB}}{2}$, deci $\widehat{AC'B'} = \widehat{T'AB}$ și ca atare, $B'C' \| T'T$.

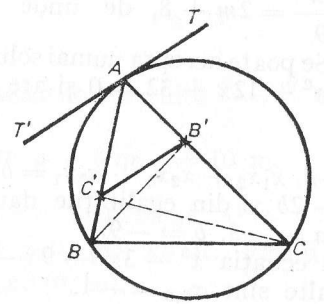


Fig. 27

132. $x_1 + x_2 = m - 2$, $x_1x_2 = m + 1$. Condiția din enunț devine $\frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = 2$, $\frac{m-2}{m+1} = 2$, $m = -4$, în acest caz, $x_{1,2} = -3 \pm 2\sqrt{3}$.

133. Dacă $x \geqslant 1$ inecuația se scrie $x - 1 + x > 2$, deci $x > \frac{3}{2}$. Dacă $x < 1$, se obține $1 - x + x > 2$ și nu există soluții. Așadar, $x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

134. Din relația $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = m$ rezultă $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = m^2 - 2$; apoi, $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x + 3 \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = m^3$, de unde $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = m^3 - 3m$.
În fine, $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x = m^4 - 2m^2 + 2$.

135. Cu notații evidente, $O_1O_2 = 100$ cm; $R_1 = 54$ cm, $R_2 = 26$ cm. Se consideră tangenta T_1T_2 și $O_2A \parallel T_1T_2$ (A pe O_1T_1).
Atunci $T_1T_2 = O_2A = \sqrt{O_1O_2^2 - (R_1 - R_2)^2} = \sqrt{10\,000 - 784} = 95$ cm.

136. $\triangle ABD$: $DE = AE \Rightarrow \widehat{EAD} = \widehat{EDA}$.
$\triangle ACD$: $DF = AF \Rightarrow \widehat{FAD} = \widehat{ADF}$ și adunînd relațiile obținute, rezultă $\widehat{EAD} + \widehat{DAF} = \widehat{EDA} + \widehat{ADF}$, adică $\widehat{BAC} = \widehat{FDE}$.

137. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației respective. Avem $x_1 + x_2 = -m$, $x_1x_2 = 2m + 8$ și punînd condiția $x_1 = 2x_2$, rezultă $x_2 = -\frac{m}{3}$, $x_1 = -\frac{2m}{3}$, deci $\frac{2m^2}{9} = 2m + 8$, de unde $m^2 - 9m - 36 = 0$, $m_1 = 12$, $m_2 = -3$. Se poate accepta numai soluția $m = 12$. În acest caz, ecuația devine $x^2 + 12x + 32 = 0$ și are rădăcinile $x_1 = -8$, $x_2 = -4$.

138. 1) $x_1 + x_2 + x_3 = -a$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b$, $x_1x_2x_3 = 5$. Atunci $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 - 2b$ și din egalitățile date, rezultă $-a = 3$, $a^2 - 2b = 27$, deci $a = -3$, $b = -9$.
2) Trebuie rezolvată ecuația $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$; o rădăcină este $x_1 = 5$ și celelalte sînt $x_{2,3} = -1$.

139. 1) $E(x) = \left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right)\sin^3 x + \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right)\cos^3 x = \sin^3 x + \sin^2 x \cos x + \cos^3 x + \sin x \cos^2 x = \sin x(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin x + \cos x$.
2) Ecuația respectivă este $\sin x + \cos x + 1 = 0$ (pentru $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$).
Deci $2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2\cos^2 \frac{x}{2} = 0, 2\cos \frac{x}{2}\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right) = 0$.
Rezultă $\cos \frac{x}{2} = 0$, $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 0$, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$. Dar $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$ și ca atare, ecuația nu are soluții.

140. $AD = a \cos 30° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AS = AD \cdot \operatorname{ctg} 30° = \frac{3a}{2}$.
Altă metodă: $\triangle ASD \sim \triangle DAC$ etc.

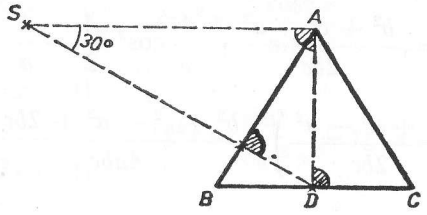


Fig. 28

141. Din teorema sinusurilor, rezultă $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ $\left(= \frac{a+b+c}{12} = 2\right)$, de unde $a = 6$ m, $b = 8$ m, $c = 10$ m.

142. Inecuația se scrie echivalent $x^2 + x + 1 < (2x + 1)(x^2 + 1)$, deoarece $x^2 + 1 > 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$. Rezultă $2x^3 + x > 0$, $x(2x^2 + 1) > 0$. Deci $x \in (0, \infty)$.

143. Domeniul de admisibilitate a soluțiilor: $3x^2 - 5x > 0$, $5 - 3x > 0$, deci $x \in (-\infty, 0)$. Ecuația se scrie echivalent $-\log(3x^2 - 5x) = -\log(5 - 3x)$, $3x^2 - 5x = 5 - 3x$, $3x^2 - 2x - 5 = 0$. Unica soluție acceptabilă este $x = -1$.

144. În mod necesar $x, y \in \mathbf{N}$ și $x \geqslant y + 1$. Sistemul se scrie $\frac{x!}{(x-y)!} : \frac{x!}{(x-y+1)!} = 10$, $\frac{x!}{y!(x-y)!} : \frac{x!}{(y+1)!(x-y-1)!} = \frac{5}{3}$, adică $x - y + 1 = 10$, $\frac{y+1}{x-y} = \frac{5}{3}$, de unde $x = 23$, $y = 14$.

145. $\sin(x - 30°) \cdot \cos(x + 30°) = \left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{3}\sin x - \cos x) \cdot (\sqrt{3}\cos x - \sin x) = \frac{1}{4}(4\sin x \cos x - \sqrt{3}) = \frac{2\sin 2x - \sqrt{3}}{4}$.

146. Avem $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1 + \cos A}{2} = \frac{1}{2a}\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{4abc}$ și similar pentru B și C.

Atunci $\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2} =$

$= \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc + a^2 + c^2 - b^2 + 2ac + a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{4abc} =$

$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac}{4abc} = \frac{(a + b + c)^2}{4abc} = \frac{p^2}{abc}$.

147. Dacă $x \geqslant 0 \Rightarrow 3x = 5x + 3$, $x = -\frac{3}{2}$ și nu este acceptabilă; dacă $x < 0 \Rightarrow -5x = 5x + 3$, $10x = -3$ și se obține soluția $x = -\frac{3}{10}$.

148. În mod necesar $x^2 + x - 5 > 0$, $x > 0 \Rightarrow x > \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$. Ecuația se scrie $\frac{1}{4}\lg(x^2 + x - 5) = \lg x + \lg 1 - \lg x$, adică $\lg(x^2 + x - 5) = 0$, $x^2 + x - 6 = 0$. Se poate accepta numai soluția $x = 2$.

149. $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x - 2\cos^2 x} = \frac{1 - \operatorname{ctg}^2 x}{1 - 2\operatorname{ctg}^2 x} = \frac{1 - 9}{1 - 18} = \frac{8}{17}$.

150. $\frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x - \operatorname{ctg}^2 x} - \operatorname{tg}^6 x = \frac{\sin^2 x - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} - \operatorname{tg}^6 x =$

$= \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}(\cos^2 x - 1)}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}(\sin^2 x - 1)} - \operatorname{tg}^6 x = \frac{\sin^6 x}{\cos^6 x} - \operatorname{tg}^6 x = 0$.

151. Fie $z_1 = 2$, $z_2 + z_3 = 0$. Deoarece $z_1 + z_2 + z_3 = n - m$, rezultă $z_1 = n - m$. Așadar, $n - m = 2$. Punînd condiția ca 2 să fie rădăcină, rezultă $8 + 4(m - n) + 2(2m - 3n) + m + 3n = 0$, adică $9m - 7n + 8 = 0$. Atunci $m = 3$, $n = 5$. Ecuația dată devine $z^3 - 2z^2 - 9z + 18 = 0$, $(z - 2)(z^2 - 9) = 0$ și are rădăcinile $z_1 = 2$, $z_{2,3} = \pm 3$.

152. Inecuația se scrie echivalent $\frac{2x}{x^2 - 4x + 3} > 0$ și are soluția $x \in (0, 1) \cup (3, \infty)$.

153. $x_1 + x_2 = -\frac{m}{4}$, $x_1x_2 = \frac{5}{4}$, $3x_1 + x_2 = -8 \Rightarrow x_1 = \frac{m - 32}{8}$ și $x_2 = \frac{32 - 3m}{8}$.

Se obține ecuația în m

$\frac{(m - 32)(32 - 3m)}{64} = \frac{5}{4}$, $3m^2 - 128m + 1104 = 0$, de unde $m_1 = 12$, $m_2 = \frac{92}{3}$ etc.

154. Ecuația se scrie echivalent $2^{x(x-1)-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}}$, de unde $x(x - 1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $4x^2 - 4x - 3 = 0$, $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Ambele soluții sînt acceptabile.

155. În dezvoltarea $(\alpha + \beta)^n$, termenul al $(k + 1)$-lea este $T_{k+1} = C_n^k \alpha^{n-k} \beta^k$, $(\forall)$, α, $\beta \in \mathbf{R}$ și pentru orice $0 \leqslant k \leqslant n$. În cazul de față, $T_{k+1} = C_{30}^k (ax^{-\frac{1}{2}})^{30-k} \cdot (xa^{-\frac{1}{2}})^k$, $0 \leqslant k \leqslant 30$. Acest T_{k+1} nu depinde de $x \neq -\frac{1}{2}(30 - k) + k = 0$, adică $k = 10$. Termenul cerut în enunț este $C_{30}^{10} a^{15}$.

156. $z_1 + z_2 + z_3 = 6$; atunci din relația $z_1 + z_2 = z_3$, rezultă $z_3 = 3$. Punînd condiția că $z_3 = 3$ verifică ecuația dată, se deduce $a = -60$. Ecuația se scrie $(z - 3)(z^2 - 3z + 5) = 0$ și

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm i\sqrt{11}}{2}.$$

157. Pentru $x \neq 1, -1$, ecuația se scrie $\frac{x^2}{(x + 1)^2} + \frac{x^2}{(x - 1)^2} = 2$,

$\frac{x^2}{(x^2 - 1)^2}[(x + 1)^2 + (x - 1)^2] = 2$, $2x^2(x^2 + 1) = 2(x^2 - 1)^2$,

$3x^2 = 1$, $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

158. $\sqrt{x^2 + y^2} - x - iy = 1 + 2i$, deci

$\sqrt{x^2 + y^2} - x = 1$, $y = -2$ și în concluzie, $z = \frac{3}{2} - 2i$.

159. 1) $\frac{a^{2x} + a^{-2x} + 2}{4} - \frac{a^{2x} + a^{-2x} - 2}{4} = 1$, ceea ce este evident.

2) $a^{2x} + a^{-2x} + 2 + a^{2x} + a^{-2x} - 2 = 4$,

$a^{2x} + a^{-2x} = 2$. Notăm $a^{2x} = y$ și ecuația devine $y + \frac{1}{y} = 2$,

$(y - 1)^2 = 0$, $y = 1$, deci $x = 0$.

160. Presupunem $a^2 + b^2 = 7ab$, $a > 0$, $b > 0$. Trebuie verificat că $\log \frac{a + b}{3} = \frac{1}{2}\log(ab)$, adică $\frac{a + b}{3} = (ab)^{1/2}$, adică $\frac{(a + b)^2}{9} = ab$, adică $a^2 + b^2 + 2ab = 9ab$, ceea ce rezultă din ipoteză.

161. Ecuația admite și rădăcina $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ și deci membrul întîi se divide cu $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - 2x - 1$; restul împărțirii este $(5a + 2b + 17)x + (2a + b + 7)$, deci în mod necesar,

$\begin{cases} 5a + 2b + 17 = 0 \\ 2a + b + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -3,\ b = -1$; ecuația se scrie

$(x^2 - 2x - 1)(x^2 - x - 2) = 0$, deci $x_3 = 2$, $x_4 = -1$.

162. Raportul respectiv este egal cu

$$\frac{4 \cdot \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2.$$

163. Ecuația se scrie echivalent $4\sin x - (1 - 2\sin^2 x) + 3 = 0$,

$2(\sin x + 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

164. Raportul este egal cu

$$\frac{\sin x + \dfrac{\sin x}{\cos x}}{\cos x + \dfrac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\sin^2 x(1 + \cos x)}{\cos^2 x(1 + \sin x)}$$

și este evident pozitiv în condițiile indicate (deoarece pentru $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, avem $1 + \cos x > 0$, $1 + \sin x > 0$).

165. Latura bazei este egală cu $\frac{L}{4h}$. Secțiunea respectivă este dreptunghiul $BDD'B'$ în care $BD = \frac{L}{4h}\sqrt{2}$. Aria cerută este $\frac{L\sqrt{2}}{4}$ (și nu depinde de h).

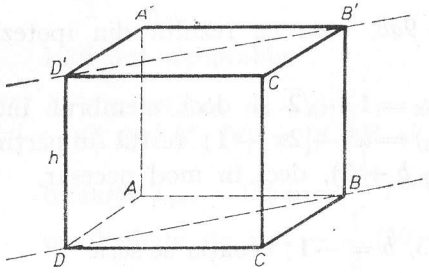


Fig. 29.

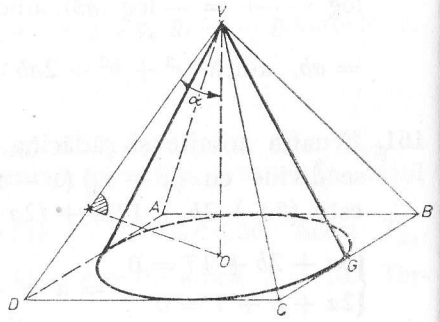


Fig. 30

166. $VO = \frac{d}{\sin\alpha}$, $OD = \frac{d}{\cos\alpha}$. Latura l a bazei satisface condiția

$OD = \frac{l\sqrt{2}}{2}$, deci $l = \frac{d\sqrt{2}}{\cos\alpha}$.

Generatoarea conului înscris este $VG = \sqrt{VO^2 + OG^2} =$

$$= \sqrt{\frac{d^2}{\sin^2\alpha} + \frac{d^2}{2\cos^2\alpha}} = \frac{d\sqrt{2}}{\sin 2\alpha}\cdot\sqrt{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}.$$

Aria cerută $= \pi \cdot OG \cdot VG + \pi \cdot OG^2 =$

$$= \frac{\pi d^2}{2\cos^2\alpha}\left(1 + \frac{\sqrt{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}}{\sin\alpha}\right).$$

FIZICĂ

Redactor: ILEANA NEGULESCU

Cuprins

I. ENUNȚURI 83
A. FACULTĂȚILE DE FIZICĂ 83
a. Concursul de admitere din iulie 1978 83
b. Concursul de admitere din iulie 1979 84

B. ÎNVĂȚĂMÎNT SUPERIOR TEHNIC – INGINERI 87
a. Concursul de admitere din iulie 1978 87
b. Concursul de admitere din septembrie 1978 91
c. Concursul de admitere din iulie 1979 93

C. ÎNVĂȚĂMÎNT SUPERIOR TEHNIC – SUBINGINERI 99
a. Concursul de admitere din iulie 1978 99
b. Concursul de admitere din septembrie 1978 101
c. Concursul de admitere din iulie 1979 102

D. ÎNVĂȚĂMÎNT SUPERIOR ECONOMIC 105
a. Concursul de admitere din iulie 1978 105
b. Concursul de admitere din iulie 1979 108

E. ÎNVĂȚĂMÎNT SUPERIOR MEDICAL 112
a. Concursul de admitere din iulie 1978 112
b. Concursul de admitere din iulie 1979 113

II. REZOLVĂRI 116

I. ENUNȚURI

A. FACULTĂȚILE DE FIZICĂ

a. Concursul de admitere din iulie 1978

1. Ecuația mișcării oscilatorii armonice. Viteza și accelerația în mișcarea oscilatorie armonică.

2. Un plan înclinat cu lungimea $l = 8$ m face unghiul $\alpha = 30°$ cu planul orizontal. Din punctul cel mai înalt al planului înclinat alunecă cu frecare, fără viteză inițială, un corp. Să se determine:

a) coeficientul de frecare dintre corp și plan, dacă viteza cu care ajunge corpul la baza planului înclinat este egală cu jumătate din viteza pe care ar fi atins-o la baza planului, alunecînd fără frecare;

b) cu cît ar crește temperatura corpului, dacă 60% din lucrul mecanic al forțelor de frecare s-ar folosi la încălzirea corpului?

Se dau: căldura specifică a corpului $c = 460 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, accelerația gravitațională $g = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

3. Știind că pentru a încălzi izobar, cu $\Delta T = 5$ K, o cantitate de oxigen molecular (asimilat unui gaz perfect) cu masa $m = 2$ kg este necesar să se transmită gazului cantitatea de căldură $Q = 9\,160$ J, să se determine:

a) căldura specifică la presiune constantă a oxigenului;

b) lucrul mecanic efectuat de gaz în cursul dilatării izobare;

c) variația energiei interne a gazului, în cursul procesului considerat.

Se dau: masa molară a oxigenului $M = 32 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$, constanta generală a gazelor perfecte $R = 8\,310 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

4. Modelul atomic al lui Rutherford și deficiențele lui. Postulatele lui Bohr.

5. Un electron aflat într-un cîmp magnetic uniform se mișcă pe o traiectorie circulară. Inducția cîmpului magnetic este de $2{,}1 \cdot 10^{-2}$ T, iar raza cercului descris de electron este de 10 cm.

Să se afle de cîte ori este mai mare masa electronului în mișcare față de masa lui în repaus, știind că masa electronului în repaus este de $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, iar sarcina $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ coulombi.

6. Un dispozitiv Young avînd distanța între fante egală cu 0,5 mm și distanța între planul fantelor și ecranul pe care se observă interferența de 1,2 m, este iluminat cu o sursă monocromatică de lumină avînd $\lambda = 500$ nm.

a) Să se calculeze interfranja observată pe ecran.

b) Cît de mare trebuie să fie distanța între fantele dispozitivului, pentru ca interfranja să se dubleze?

c) Ce valoare are interfranja, dacă întregul dispozitiv se scufundă într-un lichid avînd indicele de refracție $n = 1{,}50$, în condițiile punctului *a*?

b. Concursul de admitere din iulie 1979

7. Se aruncă vertical în sus un corp de masă $m_1 = 0{,}47$ kg, cu viteza $v_1 = 20$ m $\cdot$ s^{-1}, iar după 2 s se trage — în același sens și după aceeași direcție — un glonte de masă $m_2 = 3 \cdot 10^{-2}$ kg, cu viteza $v_2 = 100$ m $\cdot$ s^{-1}. Să se determine:

a) înălțimea maximă la care ajunge corpul înainte de a fi lovit de glonte și energia potențială corespunzătoare;

b) după cît timp de la aruncarea corpului, acesta este lovit de glonte și înălțimea la care se produce ciocnirea;

c) viteza ansamblului imediat după ciocnirea presupusă neelastică.

Se va considera accelerația gravitațională $g = 10$ m $\cdot$ s^{-2}.

8. Un mol de heliu (asimilat unui gaz perfect) efectuează un proces ciclic format din două transformări izocore și din două transformări izobare. Temperaturile corespunzînd stărilor *1, 2, 3* și *4* (v. fig. 1) sînt: $t_1 = 27$°C, $t_2 = t_4$ și respectiv, $t_3 = 159$°C. Să se determine:

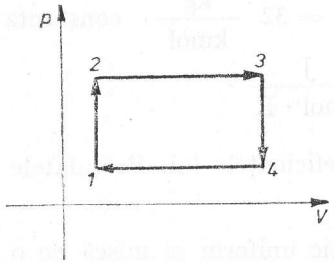


Fig. 1

a) temperaturile t_2 și t_4;

b) lucrul mecanic efectuat de gaz pe întregul ciclu;

c) variațiile energiei interne în cursul încălzirii izocore și destinderii izobare, căldura primită în aceste transformări și randamentul motorului termic care ar funcționa după acest ciclu. Se dă: $R = 8\,310$ J $\cdot$ kmol^{-1} $\cdot$ K^{-1}.

9. O bară de fier avînd lungimea $l = 0{,}5$ m și masa $m_1 = 2$ kg, aflată la temperatura $t_1 = -10$°C, este cufundată într-o baie de capacitate calorică neglijabilă, conținînd o cantitate de petrol cu masa $m_2 = 4{,}6$ kg la temperatura $t_2 = 45$°C. Știind că la temperatura finală, un volum de fier egal cu cel inițial cîntărește 1,9964 kg, să se determine:

a) temperatura finală a băii;

b) coeficientul de dilatare liniară al fierului;

c) forța necesară pentru a împiedica alungirea barei de fier.

Se dau: densitatea fierului, $\rho = 7\,800$ kg $\cdot$ m^{-3} (valoare medie); modulul de elasticitate al fierului, $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ N $\cdot$ m^{-2}; căldura specifică a fierului, $c_1 = 460$ J $\cdot$ kg^{-1} $\cdot$ K^{-1} și căldura specifică a petrolului, $c_2 = 2\,000$ J $\cdot$ kg^{-1} $\cdot$ K^{-1}.

10. Să se deducă:

a) teorema variației energiei cinetice;

b) expresiile perioadelor oscilațiilor armonice ale oscilatorului elastic și ale pendulului simplu (matematic);

c) randamentul motorului termic care funcționează după un ciclu Carnot reversibil.

11. Să se scrie, indicînd semnificațiile fizice ale parametrilor care intervin:

a) expresia legii lui Hooke;

b) legea de variație a presiunii unui fluid de densitate dată, în repaus față de pămînt;

c) ecuația fundamentală a termodinamicii.

12. Un circuit paralel este format dintr-un rezistor cu rezistența $R = 1$ kΩ, o bobină cu inductanța $L = 25$ μH și un condensator variabil. Circuitul este alimentat de la un generator de curent alternativ de frecvență fixă ($\nu = 1$ MHz), care debitează — indiferent de impedanța circuitului exterior — un curent de intensitate efectivă $I = 50$ mA. Să se determine:

a) capacitatea C_a a condensatorului variabil pentru care se realizează rezonanța intensităților și puterea activă disipată în circuit în acest caz;

b) raportul $(C_1 - C_2)/C_a$, unde C_1 și C_2 sînt capacitățile condensatorului variabil pentru care puterea activă scade la jumătate din valoarea corespunzînd rezonanței;

c) lungimea de undă a radiației electromagnetice cu frecvența indicată, într-un mediu cu permitivitatea relativă $\varepsilon_r = 1$ și cu permeabilitatea relativă $\mu_r = 25$.

13. Cu ajutorul unui ciclotron ai cărui duanți au raza $R = 1$ m se dorește să se obțină accelerarea particulelor α pînă la energia cinetică $E_c = 50$ MeV. Să se determine:

a) creșterea în procente a masei de mișcare a particulelor α față de masa lor de repaus, $m_0 = 6{,}65 \cdot 10^{-27}$ kg și viteza corespunzătoare a particulelor α;

b) valoarea inducției cîmpului magnetic uniform din zona duanților ciclotronului și frecvența corespunzătoare a tensiunii alternative aplicate între duanți;

c) aria suprafeței delimitate de semicircumferințele parcurse consecutiv într-un duant de particula α accelerată și durata accelerării particulei α, pornind de la o energie cinetică inițială neglijabilă știind că amplitudinea tensiunii alternative aplicate între duanți este $U_m = 2$ kV.

Sarcina particulei α este: $q = 2e = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ C.

14. O rețea plană de difracție cu constanta $d = 1{,}65$ μm este iluminată normal cu un fascicul de lumină monocromatică corespunzînd uneia dintre liniile spectrale ale hidrogenului atomic. Știind că maximul de difracție de ordinul 2 se observă sub unghiul $\alpha = 30°$ față de direcția de incidență, să se determine:

a) numerele cuantice principale ale stărilor atomului de hidrogen între care se produce tranziția însoțită de emisia fotonilor radiației studiate;

b) valoarea maximă a potențialului de frînare a fotoelectronilor pentru un fotocatod de cesiu ($E_{ex} = 1{,}9$ eV) pentru care radiația considerată mai poate produce curent fotoelectric;

c) presiunea exercitată de radiația considerată asupra fotocatodului, știind că energia radiației luminoase, incidentă normal pe 1 cm^2, în durata de 1 s, este egală cu $5 \cdot 10^{-4}$ J, energia fotoelectronilor emiși fiind neglijabilă.

Se dau: $h \cong 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s, $R_H \cong 3{,}28 \cdot 10^{15}$ Hz, $c \cong 3 \cdot 10^8$ m $\cdot$ s^{-1}, $e \cong 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

15. Să se justifice:

a) expresia legii lui Ohm, pornind de la considerente privind mișcarea ordonată a electronilor liberi într-un conductor;

b) expresia tensiunii induse într-un conductor liniar mobil într-un cîmp magnetic uniform;

c) legea dezintegrării radioactive.

16. Să se scrie, indicînd semnificațiile fizice ale mărimilor care intervin:

a) expresia forței de interacțiune între două sarcini punctiforme;

b) expresiile intensității cîmpului magnetic pe axa unui solenoid, în jurul unui conductor liniar parcurs de curent, respectiv, în centrul unui conductor circular parcurs de curent;

c) expresiile defectului de masă al unui nucleu și a energiei de reacție (nucleare).

B. ÎNVĂȚĂMÎNT SUPERIOR TEHNIC — INGINERI

a. Concursul de admitere din iulie 1978

17. Un corp cu greutatea $G_1 = 50$ N se poate deplasa pe o suprafață orizontală, fiind tras de un fir petrecut peste un scripete, la al cărui capăt se leagă un corp cu masa $m_2 = 5$ kg, care cade vertical. Se cere să se calculeze:

a) forța de frecare exercitată asupra corpului care lunecă și tensiunea în fir;

b) ce masă m_2' ar trebui să aibă corpul care cade vertical, pentru ca sistemul să se miște uniform?

Coeficientul de frecare al corpului G_1 pe suprafață este $\mu = 0{,}1$, iar accelerația gravitației $g = 10$ m/s^2.

18. O cantitate de un mol gaz ideal se află închisă într-un cilindru cu piston, lungimea cilindrului fiind $l = 0{,}15$ m și secțiunea sa $S = 100$ cm^2. Sistemul se află în contact cu un termostat, care menține constantă temperatura $T = 300$ K. Se cere să se calculeze:

a) presiunea p_1 din cilindru;

b) creșterea $p_2 - p_1$ a presiunii, dacă pistonul comprimă gazul, deplasîndu-se timp de 5 s cu viteza $v = 1$ cm $\cdot$ s^{-1}.

Se va lua constanta gazelor $R = 8{,}31$ J/mol $\cdot$ K.

19. Un ampermetru cu rezistența R_A poate măsura un curent de n_1 ori mai mare dacă este șuntat cu un rezistor cu rezistența R_1 și un curent de n_2 ori mai mare dacă este șuntat cu un rezistor cu rezistența R_2. Se cere să se calculeze:

a) raportul n_p care arată de cîte ori poate fi mai mare curentul care poate fi măsurat, dacă rezistoarele se leagă în paralel;

b) raportul n_s care arată de cîte ori poate fi mai mare curentul care poate fi măsurat, dacă rezistoarele se leagă în serie.

20. Puterea (definiție, legătura cu alte mărimi fizice).

21. Principiul întîi al termodinamicii (enunț și explicarea mărimilor fizice care intră în enunțul cantitativ).

22. Rezonanța în circuitul oscilant.

23. Un corp de masă m alunecă pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$ față de planul orizontal. Corpul pornește din repaus de la înălțimea $h = 20$ m. Coeficientul de frecare între corp și plan este $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Să se calculeze:

a) viteza cu care corpul ajunge la baza planului înclinat;

b) distanța parcursă de corp pe planul orizontal, dacă coeficientul de frecare pe planul orizontal este egal cu cel de pe planul înclinat.

Se consideră $g = 10$ m/s^2.

24. Un calorimetru din cupru de masă $m_1 = 0{,}3$ kg conține o cantitate de apă cu masa $m_2 = 0{,}5$ kg aflîndu-se la temperatura $t_1 = 15°C$. În calorimetru se introduce o bilă de cupru de masă $m_3 = 0{,}56$ kg la temperatura $t_2 = 100°C$. Temperatura de echilibru în vas este $\theta = 22{,}5°C$. Să se calculeze:

a) căldura specifică a cuprului;

b) capacitatea calorică a calorimetrului.

25. Un încălzitor electric cu inductanța $L = \frac{1}{10\pi}$ H și rezistența activă $R = 10\ \Omega$ este alimentat la o sursă de curent alternativ cu tensiunea $U = 220$ V și frecvența $\nu = 50$ Hz. Să se calculeze:

a) intensitatea curentului I;

b) energia consumată de încălzitor în timpul $t = 2$ minute.

26. Principiul lui Huygens.

27. Legea gazului ideal (ec. Mendeleev-Clapeyron).

28. Inducția magnetică a cîmpului din interiorul unui solenoid parcurs de un curent electric.

29. Într-un calorimetru de capacitate calorică neglijabilă, care conține — în echilibru termodinamic — $m_1 = 3$ kg apă și o bucată de gheață de masă $m_2 = 0{,}5$ kg, se introduc treptat vapori de apă la temperatura $t_v = 100°C$. Se cere cantitatea de apă din calorimetru, în momentul cînd toată gheața s-a topit.

Se dau: căldura latentă de topire a gheții $\lambda_g = 3{,}34 \cdot 10^5 \frac{J}{kg}$, căldura specifică a apei $c_a = 4\,180 \frac{J}{kg \cdot K}$, căldura latentă de vaporizare a apei $\lambda_v = 2{,}26 \cdot 10^6 \frac{J}{kg}$.

30. Aerul dintr-o cameră de volum $V = 50$ m^3 se află inițial la presiunea $p = 0{,}98 \cdot 10^5$ N $\cdot$ m^{-2} și temperatura $t_1 = 10°C$. Cu ajutorul unei sobe care folosește cărbune cu puterea calorică $q = 3 \cdot 10^7 \frac{J}{kg}$, aerul din cameră este încălzit pînă la temperatura $t_2 = 20°C$. Să se determine:

a) masa aerului care iese din cameră, în cursul încălzirii izobare;

b) cantitatea de cărbune necesară pentru încălzirea izocoră a aerului, din starea inițială pînă la temperatura t_2.

Se dau: masa molară a aerului $M = 29 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{mol}$, constanta gazelor perfecte $R = 8{,}31$ J $\cdot$ mol^{-1} $\cdot$ K^{-1}, căldura specifică la volum constant a aerului $c_V = 715 \frac{J}{mol \cdot K}$.

31. Fie un electron a cărui masă de mișcare este de două ori mai mare decît masa sa de repaus ($m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg). Să se calculeze:

a) viteza și energia cinetică a electronului;

b) frecvența și masa unui foton care are energia egală cu energia de repaus a electronului.

Se dau: constanta lui Planck $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s, viteza luminii în vid $c = 3 \cdot 10^8$ m $\cdot$ s^{-1}.

32. Deducerea formulei fundamentale a gazului ideal.

33. Compunerea vitezelor în mecanica relativistă.

34. Aplicații ale interferenței.

35. Asupra unui corp de masă $m = 5$ kg, aflat pe un plan înclinat care face unghiul α cu planul orizontal, acționează o forță F orientată

în sus, paralel cu planul înclinat. Coeficientul de frecare al corpului cu planul înclinat este μ. Dacă valoarea forței F este $F_1 = 35{,}1$ N, corpul urcă uniform pe plan, iar dacă forța are valoarea $F_2 = 13{,}9$ N, corpul coboară uniform pe plan. Să se determine:

a) unghiul α;

b) coeficientul de frecare între corp și planul înclinat.

Se va lua accelerația gravitațională $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

36. Un motor termic ideal, cu puterea utilă $P = 1$ kW, funcționează după un ciclu Carnot între temperaturile $T_1 = 500$ K și $T_2 = 300$ K. Știind că 30% din cantitatea de căldură cedată sursei reci, în decurs de 10 minute, servește pentru încălzirea unei bare de oțel, cu lungimea inițială $l_0 = 2$ m și secțiunea $S = 5 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$, să se determine:

a) creșterea Δt a temperaturii barei;

b) alungirea prin dilatare termică a barei și forța care trebuie aplicată asupra acesteia pentru a-i menține nemodificată lungimea inițială.

Se dau: densitatea $\rho = 7\,800\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (în condiții normale), coeficientul dilatării liniare $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \text{K}^{-1}$, căldura specifică $c = 460 \dfrac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ și modulul de elasticitate $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}\ \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ al oțelului. Se neglijează pierderile de căldură ale barei față de mediul ambiant.

37. Un circuit de curent alternativ, alimentat la o tensiune de 220 V cu frecvența $\nu = 50$ Hz, este compus dintr-un rezistor de rezistență $R = 30\ \Omega$ legat în serie cu o bobină de rezistență nulă și un condensator. La frecvența specificată, bobina are reactanța inductivă $X_L = 160\ \Omega$, iar condensatorul are reactanța capacitivă $X_C = 120\ \Omega$. Să se calculeze:

a) intensitatea curentului electric în circuit;

b) frecvența pentru care s-ar produce fenomenul de rezonanță serie (rezonanța tensiunilor).

38. Să se enunțe legea fundamentală a dinamicii, legea acțiunilor reciproce și legea independenței acțiunii forțelor.

39. Temperatura absolută. Relația de transformare a temperaturilor din grade Celsius în Kelvin.

40. Acțiunea câmpului magnetic asupra particulelor electrizate aflate în mișcare.

41. Un resort de masă neglijabilă, având constanta elastică $k = 10\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$, este suspendat în poziție verticală. La capătul resortului se agață un corp de masă $m = 0{,}1$ kg, care se lasă liber. Se cere să se afle:

a) ecuația care descrie oscilația corpului de masă m, din momentul agățării de resort;

b) alungirea maximă a resortului, în raport cu lungimea sa inițială.

Se va lua accelerația gravitațională $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

42. O mașină termică funcționează după un ciclu Carnot între temperaturile $t_1 = 227°\text{C}$ și $t_2 = 27°\text{C}$, producînd un lucru mecanic de 400 J la fiecare ciclu parcurs. Să se calculeze:

a) randamentul mașinii termice;

b) cantitatea de căldură luată de la sursa caldă și cantitatea de căldură cedată sursei reci, pentru fiecare ciclu parcurs.

43. Un fascicul de electroni, care transportă $n = 10^{10}$ electroni cu viteza $v = 5 \cdot 10^6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, intră într-un cîmp magnetic omogen de inducție $B = 0{,}01$ T după o direcție perpendiculară pe cîmp. Se cere să se calculeze:

a) raza traiectoriei descrise de electroni în cîmpul magnetic, știind că masa electronului este $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, iar sarcina electronului $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C;

b) inducția cîmpului magnetic produs de fasciculul de electroni în centrul traiectoriei, permeabilitatea magnetică a vidului fiind $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$.

44. Expresia matematică a lucrului mecanic.

45. Combustibili.

46. Legea autoinducției (enunț și explicarea mărimilor fizice care intră în expresia legii).

b. Concursul de admitere din septembrie 1978

47. Într-o piesă, de masă $m = 16$ kg, turnată dintr-un aliaj cu densitatea $\rho = 8 \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, există goluri închise. Știind că în apă greutatea aparentă a piesei este $G_a = 135$ N, să se determine:

a) volumul piesei;

b) procentul din volumul piesei care este gol.

Se dă densitatea apei, $\rho_a = 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ și se va lua accelerația gravitațională $g = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

48. O bară de fier aflată la temperatura $t_1 = 25°C$ are lungimea $l_1 = 1$ m și secțiunea $S = 10^{-3}$ m^2. Bara este încălzită prin arderea a $5 \cdot 10^{-2}$ kg petrol cu puterea calorică $q = 4 \cdot 10^7$ J $\cdot$ kg^{-1}. Densitatea barei este $\rho = 7\,800$ kg $\cdot$ m^{-3} (valoarea medie), iar căldura sa specifică este $c = 500$ J $\cdot$ kg^{-1} $\cdot$ K^{-1}. Coeficientul mediu de dilatație liniară al barei este $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ K^{-1}, iar modulul de elasticitate este $E = 1{,}96 \cdot 10^{11}$ N $\cdot$ m^{-2}. Să se calculeze:

a) temperatura la care se încălzește bara;

b) forța care trebuie să acționeze asupra barei, pentru a-i menține nemodificată lungimea inițială (l_1).

Se neglijează pierderile de căldură ale barei către mediul ambiant.

49. O bobină de inductanță $L = 3 \cdot 10^{-5}$ H este conectată în paralel cu un condensator plan, care are aria fiecărei plăci $S = 10^{-2}$ m^2, distanța dintre cele două plăci fiind $d = 10^{-4}$ m. Lungimea de undă în vid corespunzînd frecvenței de rezonanță a circuitului oscilant este $\lambda = 750$ m. Să se calculeze:

a) perioada și frecvența undelor electromagnetice pentru care este acordat circuitul oscilant;

b) permitivitatea relativă a dielectricului dintre plăcile condensatorului plan.

Se dau: viteza undelor electromagnetice în vid, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, permitivitatea dielectrică a vidului, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F $\cdot$ m^{-1}.

50. Se cere:

a) să se scrie legea lui Hooke, indicîndu-se natura mărimilor fizice care intervin;

b) să se enunțe primul principiu al termodinamicii, în cazul general, și să se indice natura mărimilor fizice care intervin;

c) să se definească unitatea S.I. de intensitate a curentului electric.

51. Se cere:

a) să se enunțe legea conservării impulsului;

b) să se scrie expresia randamentului unui motor termic funcționînd după un ciclu Carnot;

c) să se scrie expresiile puterilor activă, reactivă și aparentă, în curent alternativ monofazat.

52. Sub acțiunea unei forțe $F = 10$ N, un corp de masă $m = 0{,}1$ kg, atîrnat de capătul unui resort, se deplasează cu $x = 2 \cdot 10^{-2}$ m față de poziția de echilibru. Se cere să se calculeze:

a) pulsația, perioada și frecvența oscilațiilor libere ale corpului;

b) raportul dintre energia cinetică și cea potențială a corpului, la o distanță de origine egală cu jumătatea amplitudinii.

53. O mașină termică ideală funcționează după ciclul Carnot, avînd randamentul $\eta = 0{,}4$. Temperatura sursei reci este $t_2 = 23°C$. Mașina consumă, pe oră, 36 kg cărbune cu puterea calorică $q = 3 \cdot 10^7$ J $\cdot$ kg^{-1}, preluînd 50% din căldura obținută prin arderea cărbunelui. Se cere să se calculeze:

a) temperatura sursei calde;

b) cantitatea de căldură cedată sursei reci, în timp de un minut.

54. Un circuit electric este format dintr-o baterie cu tensiunea electromotoare $E = 10$ V și rezistența internă $r = 0{,}5$ Ω și un consumator de rezistență R. Să se determine:

a) rezistența pe care ar trebui să o aibă consumatorul, pentru ca puterea utilă să fie maximă;

b) randamentul circuitului, în cazul în care puterea utilă este maximă.

55. Se cere:

a) să se enunțe legile frecării de alunecare;

b) să se definească căldura specifică a unei substanțe;

c) dependența rezistenței electrice de dimensiunile conductorului, de natura conductorului și de temperatură.

56. Se cere:

a) definiția și expresia momentului unei forțe în raport cu un punct;

b) să se scrie expresia dependenței densității unui corp solid cu temperatura;

c) să se scrie expresia forței electromagnetice ce se exercită asupra unui conductor parcurs de un curent electric, care se află în cîmp magnetic.

c. Concursul de admitere din iulie 1979

57. Un corp cu masa $m = 1$ kg se deplasează cu frecare pe un plan orizontal, coeficientul de frecare fiind $\mu = 0{,}1$. Asupra corpului acționează o forță constantă $F = 5$ N. Să se determine:

a) accelerația corpului, dacă forța F formează cu verticala, deasupra planului orizontal, un unghi $\theta = 30°$;

b) pentru ce valoare a unghiului θ, viteza atinsă de corp după străbaterea distanței $d = 50$ m din locul de pornire este maximă, și valoarea maximă a acestei viteze;

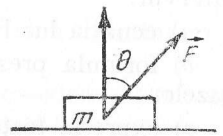


Fig. 2

c) valoarea maximă a forței F pentru care corpul rămîne în repaus, pentru orice unghi θ.

Se va lua accelerația gravitațională $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

58. O cantitate de heliu de masă $m = 0{,}2$ kg, închisă într-un cilindru orizontal cu piston, este încălzită cu $\Delta T = 200$ K de un încălzitor avînd randamentul $\eta = 0{,}5$. Să se determine:

a) lucrul mecanic efectuat de gaz în cursul încălzirii izobare;

b) cantitatea de căldură care trebuie primită de gaz, atunci cînd încălzirea se face izobar, respectiv izocor;

c) cantitățile de lignit consumate de încălzitor pentru fiecare încălzire.

Se dau: masa molară a heliului $M = 4 \dfrac{\text{kg}}{\text{kmol}}$, constanta gazelor perfecte $R = 8\,310 \dfrac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$, puterea calorică a lignitului $q = 2{,}2 \cdot 10^7 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$.

59. Un circuit format dintr-un solenoid cu inductanța $L = 34{,}6$ mH și rezistența $R = 4\ \Omega$, înseriat cu un condensator de capacitate $C = 1\,712\ \mu\text{F}$, este alimentat la tensiunea alternativă $u(t) = 2 \sin 200\ t$ (unități SI). Să se determine:

a) defazajul dintre tensiunea la bornele solenoidului și intensitatea curentului care îl străbate;

b) valoarea efectivă a intensității curentului în solenoid;

c) puterile activă, reactivă și aparentă, indicînd semnificațiile fizice ale valorilor obținute.

60. Să se deducă:

a) expresia accelerației normale în mișcarea circulară uniformă;

b) expresia randamentului unei mașini termice funcționînd după un ciclu Carnot reversibil;

c) expresia forței de interacțiune între două conductoare paralele, parcurse de un curent electric.

61. Să se scrie, indicînd semnificațiile fizice ale mărimilor care intervin:

a) ecuația lui Bernoulli;

b) formula presiunii exercitate de gazul ideal, în teoria cinetică a gazelor;

c) expresia forței (Lorentz) acționînd asupra unei particule electrizate, aflată în mișcare într-un cîmp magnetic.

62. Un corp cu masa $m_1 = 1$ kg, lansat pe un plan orizontal cu viteza inițială $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, ciocnește elastic — la distanța $d = 50$ m — un al doilea corp, aflat inițial în repaus. Să se deducă:

a) masa pe care trebuie s-o aibă al doilea corp, pentru ca — după ciocnire — primul corp să se oprească;

b) coeficientul de frecare al primului corp cu planul orizontal, dacă viteza imprimată corpului 2, în condițiile punctului precedent, este $v_2 = 9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;

c) valoarea minimă a energiei de deformare a resortului, pentru care primul corp poate fi scos din repaus, presupunînd că pentru a scoate acest corp din repaus s-a acționat asupra lui cu un resort de constantă elastică $k = 50 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

Se va lua accelerația gravitațională $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

63. Un gaz perfect, care efectuează un ciclu Carnot, produce un lucru mecanic $L = 1{,}2 \cdot 10^5$ J la fiecare ciclu parcurs. Cunoscînd temperatura sursei reci $T_2 = 280$ K, valoarea minimă $V_m = 0{,}014 \text{ m}^3$ atinsă de volumul unui mol de gaz în cursul transformării ciclice și presiunea în starea de volum minim $p = 4{,}155 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$, să se determine:

a) valoarea maximă atinsă de numărul moleculelor de gaz din unitatea de volum în cursul transformării ciclice;

b) randamentul mașinii termice;

c) căldura preluată de sursa rece în fiecare ciclu.

Se dau: constanta gazelor perfecte $R = 8\,310$ J/kmol · K, constanta lui Boltzmann $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

64. Un transformator electric cu tensiunea la ieșire $U_{ef} = 25$ kV alimentează un consumator aflat la distanța $d = 5$ km prin fire de cupru de rază $r = 3$ mm. Știind că intensitatea efectivă a curentului în linie este $I_{ef} = 80$ A, să se determine:

a) tensiunea la bornele consumatorului;

b) puterea disipată pe linie;

c) masa de apă care ar putea fi încălzită de la $t_1 = 20°\text{C}$ pînă la 100°C prin energia disipată pe linie într-o oră.

Se dau: rezistivitatea cuprului $\rho = 1{,}75 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$, căldura specifică a apei $c = 4\,180$ J/kg · K.

65. Se cere:

a) să se stabilească poziția punctului de aplicație a rezultantei a două forțe paralele și de sens contrar;

b) să se justifice legea lui Ohm, pornind de la considerente privind mișcarea ordonată a electronilor liberi în conductoare;

c) să se deducă expresia unghiului de defazaj între tensiune și curent, pentru un circuit serie cu rezistor, bobină și condensator.

66. Să se enunțe:

a) legea lui Arhimede;

b) principiul al doilea al termodinamicii;

c) teoremele lui Kirchhoff.

67. Un corp cu masa $m = 10$ kg alunecă cu frecare, pornind din repaus, de la înălțimea $h = 8$ m, pe un plan înclinat cu unghiul $\theta = 30°$ față de planul orizontal. Cunoscînd coeficientul de frecare al corpului cu planul înclinat, $\mu = 0{,}173$, să se determine:

a) accelerația corpului la coborîrea pe planul înclinat;

b) energia cinetică a corpului la baza planului înclinat;

c) durata mișcării corpului în planul orizontal, de la baza planului înclinat pînă la oprire (coeficientul de frecare pe plan orizontal avînd aceeași valoare).

Se presupune că viteza inițială în planul orizontal este egală cu cea atinsă la baza planului înclinat.

Se va lua accelerația gravitațională $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

68. Un aerostat cu volumul $V = 600$ m^3 este umplut cu hidrogen molecular (asimilat cu un gaz perfect) la presiunea $p = 8{,}31 \cdot 10^4$ N $\cdot$ m^{-2} și temperatura $t = 27°$C. Hidrogenul este scos din $n = 160$ cilindri de oțel, în fiecare cilindru presiunea hidrogenului fiind $p_1 = 41{,}55 \cdot 10^5$ N $\cdot$ m^{-2}, iar temperatura $t_2 = 7°$C. Să se determine:

a) masa de hidrogen molecular conținută de aerostat;

b) volumul unuia dintre cilindri;

c) media pătratelor vitezelor moleculelor de hidrogen din aerostat.

Masa molară a hidrogenului este $M = 2$ kg $\cdot$ kmol^{-1}, iar constanta gazelor perfecte $R = 8\,310$ J $\cdot$ kmol^{-1} $\cdot$ K^{-1}.

69. Rotorul unui dinam șunt, acționat de un motor cu puterea $P = 9$ kW, produce o tensiune electromotoare $E = 220$ V, intensitatea curentului în circuitul exterior fiind $I = 40$ A. Știind că rotorul are rezistența $r = 0{,}4\ \Omega$, iar intensitatea curentului în inductor este $I_e = 2{,}5$ A, să se determine:

a) tensiunea la bornele dinamului;

b) rezistența inductorului;

c) randamentul industrial al dinamului.

70. Să se scrie, indicînd semnificațiile fizice ale parametrilor care intervin:

a) expresiile elongației, vitezei și accelerației în mișcarea oscilatorie armonică;

b) expresiile constantei gazelor R și coeficientului de dilatare a gazelor ideale prin parametrii stării normale;

c) expresia defazajului dintre intensitatea curentului electric și tensiunea la bornele unui circuit de curent alternativ cu rezistor, bobină și condensator.

71. Să se enunțe:

a) legea independenței acțiunii forțelor și legea conservării impulsului;

b) teoremele care stau la baza măsurărilor calorimetrice;

c) legea efectului electrocaloric (Joule).

72. Volantul unei mașini, avînd diametrul $D = 1$ m, se rotește cu 600 rotații pe minut. Se cere:

a) viteza unghiulară și viteza periferică a volantului;

b) accelerația normală;

c) timpul în care volantul execută 100 rotații.

73. O cantitate de aer, închisă într-un corp de pompă, are inițial volumul $V = 0{,}1$ m^3, densitatea $\rho = 1{,}3$ kg $\cdot$ m^{-3}, temperatura $t = 27°$C și presiunea $p = 1{,}13 \cdot 10^5$ N $\cdot$ m^{-2}. Aerul evoluează după un ciclu format din două transformări izobare, parcurse la presiunile p și — respectiv — $2p$, și două transformări izocore, pentru care volumul cantității de aer este V, respectiv $3V$. Se cere să se calculeze pentru un ciclu:

a) lucrul mecanic util;

b) cantitatea de căldură cedată de izvorul cald și cantitatea de căldură primită de izvorul rece;

c) relația dintre cantitățile de căldură de la punctul precedent și lucrul mecanic util.

Se dau căldurile specifice ale aerului: $c_p = 1$ kJ $\cdot$ kg^{-1} $\cdot$ K^{-1}, $c_V = 720$ J $\cdot$ kg^{-1} $\cdot$ K^{-1}.

74. Un circuit serie conectat la o tensiune alternativă cu valoarea efectivă $U = 10$ V și frecvența de 50 Hz este format dintr-o bobină cu

rezistența $R = 4\ \Omega$ și inductanța $L = \frac{10}{\pi}$ mH, precum și un condensator de capacitate $C = \frac{2,5}{\pi}$ mF. Se cer:

a) valoarea efectivă a intensității curentului și diagrama fazorială a tensiunilor;

b) defazajul între tensiunea la bornele circuitului, respectiv tensiunea la bornele bobinei, și intensitatea curentului în circuit;

c) puterea activă, puterea reactivă și puterea aparentă în circuit.

75. Se cere:

a) să se scrie ecuația lui Bernoulli, indicîndu-se semnificațiile mărimilor fizice care intervin;

b) să se scrie expresia variației densității corpurilor solide cu temperatura;

c) să se enunțe al doilea principiu al termodinamicii.

76. Se cere să se scrie, indicîndu-se semnificațiile mărimilor fizice care apar în:

a) legea lui Hooke;

b) expresiile energiei electrice și puterii electrice dezvoltate într-un circuit electric de curent continuu;

c) legea inducției electromagnetice.

77. Două incinte de volume $V_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ m^3 și respectiv $V_2 = 10^{-2}$ m^3, umplute cu același gaz monoatomic și aflate la temperatura $T_1 = 300$ K, pot comunica între ele printr-un tub de volum neglijabil, închis inițial de un robinet. În incinta (1), presiunea gazului este $p_1 = 2 \cdot 10^5$ N $\cdot$ m^{-2}, iar în incinta (2), este $p_2 = 3 \cdot 10^5$ N $\cdot$ m^{-2}. Se deschide robinetul și se răcește după aceea incinta (2) la temperatura $T_2 = 250$ K. Să se determine:

a) numărul molilor de gaz aflați în fiecare incintă, în starea inițială;

b) numărul molilor de gaz aflați în fiecare incintă, în starea finală;

c) variația energiei interne a gazului din ambele recipiente.

Constanta gazelor perfecte este $R = 8\,310$ J $\cdot$ kmol^{-1} $\cdot$ K^{-1}.

78. O bară din aluminiu de masă $m_0 = 0,3$ kg, aflată la temperatura $T_0 = 273$ K, absoarbe o cantitate de căldură $Q = 2,67 \cdot 10^5$ J și i se ridică temperatura la T K. La această temperatură, un volum de aluminiu — egal cu cel al barei la T K — are masa $m = 0,2806$ kg. Să se determine:

a) temperatura T;

b) densitatea aluminiului la temperatura T;

c) coeficientul de dilatație în volum al aluminiului.

Se cunosc: densitatea aluminiului la 0°C, $\rho_0 = 2,7 \cdot 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}; căldura specifică a aluminiului, $c = 890$ J $\cdot$ kg^{-1} $\cdot$ K^{-1}.

79. Un flux de fotoni cu lungimea de undă $\lambda = 300$ nm și cu o putere de 10^{-6} W cade pe fotocatodul unei celule fotoelectrice. Se cere să se calculeze:

a) energia de extracție a metalului fotocatodului;

b) energia cinetică a electronilor eliberați;

c) numărul de fotoni care sosesc pe fotocatodul celulei fotoelectrice în 33 s și impulsul unui foton.

Se cunosc: constanta lui Planck, $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s; viteza luminii, $c = 3 \cdot 10^8$ m $\cdot$ s^{-1} și lungimea de undă de prag a fotocatodului, $\lambda_0 = 400$ nm.

80. Se cere:

a) să se enunțe principiul al doilea al termodinamicii;

b) să se enunțe legea dilatației liniare pentru corpurile solide;

c) să se definească kilomolul.

81. Se cere:

a) să se explice natura și să se enumere proprietățile radiațiilor X;

b) să se enunțe legile efectului fotoelectric;

c) noțiunea de simultaneitate a două evenimente în teoria relativității.

C. ÎNVĂȚĂMÎNT SUPERIOR TEHNIC — SUBINGINERI

a. Concursul de admitere din iulie 1978

82. Un corp cu masa $m = 500$ kg este ridicat uniform accelerat, pornind din repaus, cu ajutorul unui scripete fix, la înălțimea $h = 12,5$ m, într-un timp $t = 5$ s. Să se determine:

a) accelerația corpului;

b) energia potențială maximă și lucrul mecanic efectuat pentru ridicarea corpului la înălțimea h.

Se dă accelerația gravitațională $g = 9,8$ m $\cdot$ s^{-2}.

83. O ladă cu masa $m = 500$ kg este trasă uniform pe o rampă lungă de 10 m și înclinată cu 30° față de orizontală. Coeficientul de frecare între ladă și rampă este $\mu = 0{,}3$. Să se calculeze:

a) lucrul mecanic necesar pentru urcarea lăzii pe rampă, și direct pe verticală, la aceeași înălțime;

b) puterea unui motor cu ajutorul căruia lada este ridicată pe rampă, în timpul $t = 30$ s.

Se dă accelerația gravitațională $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

84. Un ampermetru de rezistență $R_A = 1\ \Omega$ este șuntat în paralel cu un conductor de cupru ($\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$) de lungime $l = 10$ m și secțiune $S = 3{,}4\ \text{mm}^2$. Ampermetrul indică un curent $I_A = 0{,}5$ A. Să se calculeze intensitatea curentului din circuit.

85. Expresia energiei potențiale a unui sistem fizic.

86. Acțiunea reciprocă a două conductoare paralele parcurse de un curent electric.

87. Propagarea undelor electromagnetice.

88. Un corp greu, de mici dimensiuni, este legat la capătul unui fir inextensibil, de lungime $l = 0{,}2$ m. Se dă corpului o mișcare de rotație în jurul verticalei, astfel încît firul se deplasează pe suprafața unui con ale cărui generatoare formează unghiul $\theta = 60°$ cu verticala. Să se determine frecvența rotației corpului.

Se va lua accelerația gravitațională $g = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

89. Un camion, cu masa $m = 3$ tone, pleacă din repaus, pe un drum orizontal. Coeficientul de frecare este $\mu = 0{,}04$. Camionul se deplasează uniform accelerat, atingînd viteza $v = 36$ km/h, după parcurgerea distanței $s = 200$ m. Să se determine:

a) timpul t în care s-a parcurs distanța s;

b) lucrul mecanic efectuat pentru învingerea forțelor de frecare și puterea maximă dezvoltată de motorul camionului în cursul deplasării.

Se va lua accelerația gravitațională $g = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

90. La bornele unei surse de curent continuu, formată din $n = 4$ elemente identice, avînd fiecare tensiunea electromotoare $E = 3$ V și rezistența internă $r = 0{,}25\ \Omega$, se leagă în paralel un vas de electroliză cu soluție de sulfat de cupru, avînd rezistența $R_1 = 40\ \Omega$ și un rezistor de rezistență $R_2 = 10\ \Omega$. Să se determine:

a) căderea de tensiune datorată rezistenței interne a unui element;

b) masa de cupru depusă la catod, dacă prin electrolit s-au deplasat $N = 10^{22}$ ioni cupru.

Se dau: echivalentul electrochimic al cuprului $k = 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ kg/C, valența cuprului $n_{Cu} = 2$, sarcina electrică elementară $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$C.

91. Energia mecanică a unui oscilator armonic.

92. Căderea de tensiune pe linie.

93. Tensiunea indusă într-un conductor liniar.

b. Concursul de admitere din septembrie 1978

94. Un automobil cu masa $m = 500$ kg, care are viteza $v_0 = 36\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, ajunge la viteza $v = 72\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, după ce se află un timp $t = 20$ s sub acțiunea unei forțe constante F. Să se determine:

a) accelerația mișcării și valoarea forței F;

b) spațiul parcurs în timpul t.

Se neglijează frecările.

95. Un punct material de masă $m = 5 \cdot 10^{-3}$ kg efectuează oscilații armonice cu amplitudinea $A = 5 \cdot 10^{-2}$ m și frecvența $\nu = 1$ Hz. Faza inițială a oscilațiilor este $\varphi = 0$. Se cere:

a) să se scrie ecuația mișcării oscilatorii a acestui punct material;

b) să se calculeze energia totală E a oscilatorului.

96. Un generator electric de curent continuu debitează pe un rezistor cu rezistența $R_1 = 10\ \Omega$, un curent electric de intensitate $I_1 = 3$ A. Dacă se înlocuiește rezistorul cu un altul, avînd rezistența $R_2 = 20\ \Omega$, curentul debitat are intensitatea $I_2 = 1{,}6$ A. Să se determine:

a) rezistența interioară a generatorului electric;

b) tensiunea electromotoare a generatorului.

97. Se cere:

a) să se deducă expresia înălțimii maxime la care ajunge un corp aruncat pe verticală, de jos în sus, cu viteza v_0;

b) să se enunțe cantitativ legea lui Coulomb și să se indice natura mărimilor fizice care intervin;

c) să se scrie expresia tensiunii electromotoare induse într-un conductor liniar care se află în mișcare într-un cîmp magnetic și să se indice natura mărimilor fizice care intervin.

98. Se cere:

a) să se definească viteza unghiulară în mișcarea circulară uniformă a punctului material;

b) să se scrie expresia intensității cîmpului magnetic generat în jurul unui conductor liniar parcurs de un curent electric și să se indice natura mărimilor fizice care intervin;

c) să se definească inductanța și să se indice unitatea S.I. de măsură a acesteia.

c. Concursul de admitere din iulie 1979

99. Un automobil cu masa $m = 1\,000$ kg se deplasează rectiliniu, pe un drum orizontal, cu viteza $v_0 = 72$ km/h. La distanța $d = 25$ m înainte de intrarea într-o curbă cu raza de curbură $R = 100$ m, șoferul frînează, imprimînd automobilului accelerația $a = -2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Se cere:

a) energia cinetică a automobilului în momentul frînării și viteza liniară a automobilului la intrarea în curbă;

b) accelerația normală și accelerația totală a automobilului imediat după intrarea acestuia în curbă;

c) forța de inerție totală care acționează asupra automobilului imediat după intrarea acestuia în curbă și coeficientul de frecare minim de alunecare dintre roți și șosea, care asigură nederaparea automobilului în întreaga zonă a curbei.

Se dă accelerația gravitațională $g \cong 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

100. Un resort are coeficientul de elasticitate $k = 100$ N/m. Fiind suspendat vertical, în repaus, de capătul lui se atașează un corp cu masa $m = 1$ kg, apoi se lasă sistemul liber. Se cere:

a) lungimea pendulului matematic care are perioada egală cu cea a oscilatorului cu resort;

b) să se scrie ecuația elongației mișcării oscilatorii a corpului atașat de resort;

c) să se scrie ecuațiile vitezei și accelerației mișcării oscilatorii a corpului atașat de resort.

Se va lua accelerația gravitațională $g = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

101. Cinci generatoare grupate în serie, avînd fiecare tensiunea electromotoare $E_1 = 4$ V și rezistența interioară $r_1 = 0{,}2\ \Omega$, alimentează un circuit format dintr-un rezistor de rezistență $R_1 = 6{,}6\ \Omega$ înseriat cu o grupare în paralel formată dintr-un al doilea rezistor de rezistență $R_2 = 4\ \Omega$ și o bobină cu rezistența $R_3 = 6\ \Omega$, de lungime $l = 0{,}1$ m și avînd $N = 50$ spire. Se cere:

a) energia disipată în rezistorul R_1 în durata a 20 ore;

b) valoarea maximă a rezistenței șuntului care trebuie adăugat unui miliampermetru care poate măsura curenți electrici de pînă la $I_m = 0{,}1$ A, pentru a putea determina cu ajutorul acestui miliampermetru intensitatea curentului care trece prin bobină;

c) intensitatea cîmpului magnetic în interiorul bobinei.

Rezistența internă a miliampermetrului este $r = 0{,}21\ \Omega$.

102. Să se scrie, indicînd semnificațiile fizice ale mărimilor care intervin:

a) legea lui Hooke;

b) randamentul mașinilor simple;

c) puterea în curent alternativ.

103. Se cere:

a) să se enunțe legea lui Arhimede;

b) să se scrie expresia dependenței rezistenței unui conductor liniar de dimensiunile și de natura conductorului;

c) să se enunțe legea efectului electrocaloric (Joule).

104. Un oscilator de masă $m = 25$ g efectuează o mișcare descrisă de ecuația:

$$y = 2 \cdot 10^{-2} \sin\left(20\ t + \frac{\pi}{4}\right). \quad \text{[unități SI]}$$

Să se determine:

a) valoarea maximă a accelerației oscilatorului;

b) momentele cînd viteza, respectiv accelerația, sînt maxime;

c) energia totală a oscilatorului.

105. O particulă avînd sarcina electrică $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$C intră în zona unui cîmp magnetic uniform cu inducția $B = 0{,}665$ T. Știind că la intrarea în zona cîmpului magnetic, viteza $v = 1{,}6 \cdot 10^6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ a particulei este perpendiculară pe direcția inducției, precum și faptul că particula descrie în zona cîmpului magnetic o circumferință de rază $r = 5$ cm, să se determine:

a) masa particulei;

b) frecvența rotațiilor particulei în cîmpul magnetic;

c) tensiunea electrică necesară pentru a accelera particula pînă la viteza indicată.

106. O sursă electrică alimentează un circuit format dintr-o grupare în derivație, constituită din rezistoarele $R_1 = 4\ \Omega$ și $R_2 = 6\ \Omega$, înseriată

cu rezistorul $R_3 = 1{,}6\ \Omega$. Ştiind că intensitatea curentului în circuit este $I = 2$ A, iar în cazul deconectării rezistorului R_2 intensitatea curentului devine $I' = 1{,}5$ A, să se determine:

a) rezistenţa electrică a circuitului în cele două cazuri;

b) tensiunea electromotoare şi rezistenţa internă a sursei;

c) puterea totală consumată de sursă, în cele două cazuri.

107. Să se scrie, indicînd semnificaţiile fizice ale parametrilor care intervin:

a) expresia modulului rezultantei a două forţe concurente;

b) expresia dependenţei lucrului mecanic al forţelor de presiune;

c) expresiile reactanţei inductive şi reactanţei capacitive.

108. Să se definească:

a) coeficientul de frecare de alunecare;

b) capacitatea electrică a unui conductor;

c) inducţia unui cîmp magnetic uniform.

109. Un corp greu, de mici dimensiuni, este lăsat să cadă pe verticală de la înălţimea $h = 520$ m. La 2 secunde după începerea căderii libere a acestui corp, se aruncă de jos în sus un al doilea corp cu viteza iniţială $v_0 = 80\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Să se determine:

a) momentul şi înălţimea la care se întîlnesc cele două mobile;

b) viteza relativă cu care trec cele două corpuri unul pe lîngă celălalt;

c) înălţimea maximă pe care o atinge cel de-al doilea corp.

Acceleraţia gravitaţională se consideră $g = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

110. Două elemente galvanice identice, cu tensiunea electromotoare $E = 2$ V, se leagă în serie printr-un rezistor de rezistenţă $R = 3\ \Omega$. Ştiind că unul singur din cele două elemente ar debita în rezistorul R un curent de intensitate $i = 0{,}5$ A, se cer:

a) intensitatea curentului debitat de cele două elemente galvanice înseriate pe rezistorul R;

b) rezistenţa internă a fiecărui element galvanic;

c) intensitatea curentului debitat în acelaşi rezistor R, dacă cele două elemente sînt legate în paralel.

111. La bornele unui alternator care furnizează o tensiune cu frecvenţa de 50 Hz şi valoarea efectivă $U = 100$ V, se conectează în serie un bec cu rezistenţa $R_1 = 20\ \Omega$ şi o bobină, avînd rezistenţa R şi inductanţa L necunoscute. La bornele becului se stabileşte o tensiune cu valoarea efectivă $U_b = 50$ V, iar la bornele bobinei o tensiune de valoare efectivă $U_L = 70$ V. Se cer:

a) intensitatea curentului în circuit;

b) rezistenţa bobinei;

c) inductanţa bobinei.

112. Se cere:

a) să se enunţe legea independenţei acţiunii forţelor;

b) să se definească puterea mecanică şi unitatea sa de măsură;

c) să se indice expresia vitezei de propagare a perturbaţiilor longitudinale în medii solide.

113. Să se scrie, indicînd semnificaţiile fizice ale mărimilor care intervin:

a) expresia energiei electrice într-un circuit de curent continuu;

b) expresia forţei de interacţiune a două conductoare paralele parcurse de un curent electric;

c) expresia capacităţii echivalente a mai multor condensatoare legate în serie.

D. ÎNVĂŢĂMÎNT SUPERIOR ECONOMIC

a. Concursul de admitere din iulie 1978

114. Un corp de masă $m = 2$ kg este lăsat să cadă liber de la înălţimea $h = 19{,}6$ m. Să se calculeze:

a) timpul după care corpul atinge solul;

b) energia cinetică a corpului, în momentul cînd acesta atinge solul.

Se va lua acceleraţia gravitaţională $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

115. Un automobil de masă $m = 2 \cdot 10^3$ kg, fiind frînat, se opreşte după parcurgerea distanţei $d = 10$ m, în timpul $t = 2{,}5$ s. Să se calculeze:

a) viteza iniţială a automobilului;

b) forţa de frînare.

116. Două corpuri de dimensiuni neglijabile faţă de distanţa dintre ele, sînt încărcate electric cu sarcinile $q_1 = +2 \cdot 10^{-7}$C şi $q_2 = -4 \cdot 10^{-7}$C şi se află într-un mediu dielectric cu permitivitatea relativă

$\varepsilon_r = 2{,}2$, la distanța $d = 10$ cm între ele. Permitivitatea vidului este $\varepsilon_0 = 8{,}84 \cdot 10^{-12}$ F/m. Să se calculeze:

a) intensitatea cîmpului electric, creat de fiecare sarcină electrică, în punctul O aflat la jumătatea distanței între ele.

b) intensitatea cîmpului electric total în punctul O.

117. Presiunea atmosferică normală.

118. Legea lui Coulomb.

119. Structura corpusculară a sarcinii electrice. Electronul.

120. Un corp este aruncat de jos în sus pe un plan înclinat, cu viteza inițială $v_0 = 40$ m $\cdot$ s^{-1}. Unghiul dintre planul înclinat și planul orizontal este $\alpha = 30°$, iar coeficientul de frecare între corp și plan este $\mu = 0{,}1$. Să se calculeze:

a) distanța parcursă de corp pe planul înclinat;

b) timpul de urcare a corpului pe planul înclinat.

Se va lua accelerația gravitațională $g = 10$ m $\cdot$ s^{-2}.

121. Un corp cu masa $m = 0{,}5$ kg, legat de un resort, oscilează în jurul poziției de echilibru. Amplitudinea mișcării oscilatorii este $A = 20$ cm, iar valoarea maximă a forței elastice care acționează asupra corpului este $F_{max} = 10$ N. Luînd poziția de echilibru a corpului drept origine a axei Oy (după direcția de oscilație) și știind că la momentul $t = 0$, corpul se află la distanța maximă de poziția de echilibru, să se determine:

a) ecuația mișcării oscilatorii, cu valori numerice;

b) energia totală a oscilatorului.

122. Două rezistoare, de rezistențe $R_1 = 40$ Ω și $R_2 = 20$ Ω, legate în paralel, se conectează la bornele unei baterii cu tensiunea electromotoare $E = 42$ V și rezistența internă $r = 0{,}7$ Ω. Să se calculeze:

a) rezistența echivalentă a celor două rezistoare și intensitatea curentului în circuit;

b) intensitatea curentului prin fiecare rezistor.

123. Perioada și frecvența mișcării circulare.

124. Dependența rezistenței electrice de dimensiunile și natura conductorului.

125. Rezistența internă a triodei.

126. Pe un plan înclinat ce face unghiul $\alpha = 30°$ cu planul orizontal este lăsat să alunece, fără viteză inițială, un corp de masă m. Coeficientul de frecare între corp și planul înclinat este $\mu_1 = 0{,}2$. Ajungînd la baza planului înclinat, corpul își continuă mișcarea pe un plan orizontal, parcurgînd distanța l_2 de trei ori mai mare decît distanța l_1 parcursă pe planul înclinat. Să se calculeze coeficientul de frecare μ_2 al corpului cu planul orizontal.

127. La o sursă cu tensiunea electromotoare constantă $E = 40$ V și rezistența internă neglijabilă, se leagă în paralel două rezistoare de rezistențe $R_1 = 8$ Ω și $R_2 = 40$ Ω. Primul rezistor constă dintr-un bec cu puterea $P = 200$ W. Să se calculeze:

a) rezistența echivalentă a celor două rezistoare legate în paralel;

b) intensitatea curentului în circuit și în fiecare rezistor.

128. Un receptor de curent alternativ, alimentat la tensiunea $U_{ef} = 220$ V, este străbătut de un curent de intensitate $I_{ef} = 2$ A. Defazajul între tensiune și curent este $\varphi = \pi/3$ radiani. Să se calculeze factorul de putere, puterea activă, puterea reactivă și puterea aparentă.

129. Mișcarea circulară uniformă a punctului material. Ecuația mișcării.

130. Legea lui Arhimede (enunț).

131. Legea autoinducției (enunț).

132. Un corp cu masa $m_1 = 50$ g, care se deplasează în direcție orizontală cu viteza $v_0 = 10$ m $\cdot$ s^{-1}, ciocnește plastic un alt corp cu masa $m_2 = 0{,}2$ kg suspendat de un fir cu lungimea $l = 0{,}8$ m și aflat inițial în repaus. Se cere să se calculeze:

a) viteza v a corpului format în urma ciocnirii plastice;

b) forța centrifugă și tensiunea în fir în momentul imediat următor ciocnirii.

Accelerația gravitațională se va lua $g = 10$ m $\cdot$ s^{-2}.

133. O bobină cu rezistența $R = 50$ Ω și inductanța $L = 2 \cdot 10^{-3}$ H este legată în serie cu un condensator cu capacitatea C. Știind că la frecvența de rezonanță, reactanța bobinei este $X_L = 12$ Ω, iar tensiunea

efectivă aplicată la bornele circuitului serie de mai sus este $U_{ef} = 220$ V, se cere să se calculeze:

a) valoarea pulsației de rezonanță a circuitului și valoarea capacității C;

b) intensitatea efectivă a curentului și puterea activă.

134. Două rezistoare identice, fiecare cu rezistența R și grupate în paralel, se leagă în serie cu un rezistor cu rezistența $R' = 2R$. La bornele circuitului astfel format se aplică o tensiune U. Știind că intensitatea curentului în fiecare din rezistoarele legate în paralel este $I = 0{,}7$ A, se cere să se calculeze:

a) valorile rezistențelor R și R', cît și rezistența echivalentă a întregului circuit, ținînd seama că există relația $R + R' = 75\ \Omega$;

b) tensiunea U aplicată și căldura produsă în circuit în timp de 50 s.

135. Viteza și accelerația în mișcarea oscilatorie armonică.

136. Legea fundamentală a dinamicii.

137. Acțiunea cîmpului magnetic asupra particulelor electrizate aflate în mișcare.

b. Concursul de admitere din iulie 1979

138. Constanta elastică a unui resort este $k = 10^3\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$. De un capăt al resortului se suspendă un corp de masă $m = 0{,}1$ kg. Se produc oscilații ale corpului astfel încît la distanța $y_1 = 3 \cdot 10^{-2}$ m de poziția de echilibru, impulsul corpului este $H_1 = 0{,}3\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$. Se cere:

a) să se scrie ecuația mișcării oscilatorii a corpului considerînd faza inițială nulă;

b) să se calculeze valoarea maximă a impulsului corpului în timpul mișcării;

c) să se calculeze energia cinetică și potențială a corpului cînd elongația mișcării este $y_2 = 4$ cm.

139. La bornele unui circuit de curent alternativ cu frecvența $\nu = 50$ Hz se aplică o tensiune avînd valoarea efectivă $U = 220$ V. Circuitul este alcătuit dintr-o bobină cu rezistența R_1, un condensator cu capacitatea C și un rezistor cu rezistența $R_2 = 20\ \Omega$, legate în serie. Știind că intensitatea efectivă în circuit este 2,2 A, defazajul la bornele

bobinei $\varphi = \frac{\pi}{3}$, iar defazajul la bornele circuitului $\varphi_c = \frac{\pi}{6}$, să se calculeze:

a) impedanța circuitului, reactanța inductivă, reactanța capacitivă și rezistența bobinei;

b) capacitatea condensatorului și inductanța bobinei;

c) puterea activă, reactivă și aparentă din circuit.

140. Pe soclul unui bec electric cu incandescență, avînd filamentul din wolfram, este scris 120 V; 60 W. Acest bec trebuie să fie alimentat de la o sursă cu tensiunea $U = 220$ V. Se cere:

a) rezistența electrică R_1 a becului în condiții normale de alimentare și rezistența R_2 a reostatului care trebuie înseriat pentru a-i asigura o funcționare normală;

b) temperatura θ_1 de încălzire a filamentului becului dacă rezistența lui la 0°C este $R_{01} = 20\ \Omega$. Coeficientul de temperatură al wolframului este $\alpha_W = 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{grd^{-1}}$;

c) energia disipată sub formă de căldură în reostatul R_2 în timp de 5 minute și sarcina electrică q ce trece prin reostat timp de 2 secunde.

141. Se cere:

a) să se enunțe legile frecării;

b) să se enunțe legea fundamentală a dinamicii;

c) să se definească lucrul mecanic.

142. Se cere:

a) să se enunțe legea lui Ohm;

b) să se scrie rezistența echivalentă pentru n rezistoare grupate în serie și pentru n rezistoare grupate în paralel;

c) să se enunțe legea lui Joule în cazul efectului electrocaloric al curentului electric.

143. Punctele unui mediu în care s-au format unde execută mișcări periodice descrise de ecuația:

$$y = 2 \cdot 10^{-3} \sin (120\ \pi\ t - 0{,}25\ x)\ \text{[unități S.I.]}$$

Să se determine:

a) frecvența oscilațiilor punctelor mediului;

b) viteza maximă a oscilațiilor punctelor mediului;

c) viteza propagării undei.

144. Un miliampermetru are scala de 50 diviziuni și măsoară 2 mA pentru o diviziune. Rezistența internă a miliampermetrului este $r = 0{,}5\ \Omega$. Se cere:

a) valoarea maximă a tensiunii care ar putea fi măsurată cu acest aparat, dacă ar fi folosit ca voltmetru;

b) cum ar putea fi utilizat acest aparat ca voltmetru, astfel încît o diviziune a sa să corespundă la 0,1 V?

c) Cum se poate extinde domeniul de măsurare al ampermetrului pentru a putea determina curenți pînă la 1 A?

145. Între polii unui electromagnet cu secțiunea $S = 18\ dm^2$ se creează un flux magnetic $\Phi = 4{,}5 \cdot 10^{-1}$ Wb. În acest spațiu se deplasează, sub acțiunea unei forțe mecanice constante $F = 0{,}5$ N, un conductor lung de 0,3 m. Se cere:

a) tensiunea electromotoare indusă în conductor, atunci cînd acesta se deplasează cu viteza $v = 0{,}6\ m \cdot s^{-1}$;

b) accelerația conductorului în acest moment, dacă capetele sale sînt legate printr-un fir cu rezistența $R = 0{,}9\ \Omega$, iar masa conductorului este $m = 0{,}15$ kg;

c) viteza limită (maximă) pe care o poate atinge conductorul, pornind din repaus.

146. Să se scrie, indicînd semnificațiile fizice ale parametrilor care intervin:

a) ecuația Galilei pentru mișcarea uniform variată cu viteză inițială;

b) expresia legii de variație a presiunii unui fluid de densitate dată, funcție de altitudine, acesta fiind în repaus față de pămînt;

c) expresia vitezei undelor electromagnetice într-un mediu omogen și izotrop.

147. Să se definească:

a) puterea (mecanică);

b) rezistivitatea unei substanțe;

c) impedanța unui circuit de curent alternativ.

148. Motorul unui autocamion de masă $m = 5\,000$ kg dezvoltă puterea $P = 40$ kW, atunci cînd acesta se deplasează cu viteza $v = 57{,}6$ km/h pe o șosea asfaltată orizontală. Să se determine:

a) valoarea coeficientului de frecare dintre cauciucul pneurilor și îmbrăcămintea asfaltică a șoselei;

b) după cît timp și la ce distanță de locul unde șoferul oprește motorul, autocamionul se oprește, presupunînd că frînele n-au funcționat;

c) viteza limită pe care o va putea atinge autocamionul în cursul urcării unei pante de înclinare $\theta = 30°$ față de orizontală, avînd același coeficient de frecare, dacă puterea maximă care poate fi dezvoltată de motor este $P_m = 125$ kW.

Se va lua accelerația gravitațională $g = 10\ m \cdot s^{-2}$.

149. O porțiune a unui circuit electric, formată din conductoarele succesiv ortogonale de lungimi $AB = CD = 0{,}4$ m, $BC = 0{,}15$ m, se poate roti în jurul punctelor fixe A și D, și se găsește într-un cîmp magnetic uniform, a cărui inducție $B = 1{,}2$ T formează unghiul $\theta = 30°$ cu verticala. Știind că atunci cînd circuitul este parcurs de un curent $I = 2$ A, laturile AB și CD sînt paralele cu inducția cîmpului magnetic, să se determine:

a) forța electromagnetică acționînd asupra conductorului BC;

b) masa conductorului BC, în condițiile în care masele conductoarelor AB și CD sînt neglijabil de mici;

c) viteza maximă pe care o va atinge conductorul BC, în cazul cînd curentul prin circuit se anulează brusc. Se va considera accelerația gravitațională $g = 10\ m \cdot s^{-2}$.

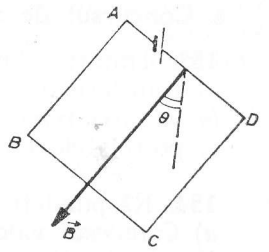


Fig. 3

150. Pe lungimile $l_1 = 4$ cm, $l_2 = 5$ cm a două miezuri magnetice, de permeabilități relative $\mu_{r1} = 40$, $\mu_{r2} = 16$, se înfășoară spire, bobinele astfel obținute fiind înseriate și conectate la bornele unei surse de curent continuu cu tensiunea electromotoare $E = 6$ V. Știind că intensitățile cîmpurilor magnetice în cele două bobine și respectiv, fluxurile magnetice în cele două bobine sînt egale și în condițiile în care rezistențele înfășurărilor bobinelor sînt $R_1 = 4{,}5\ \Omega$, $R_2 = 7\ \Omega$, iar intensitatea curentului în circuit $I = 0{,}5$ A, să se determine:

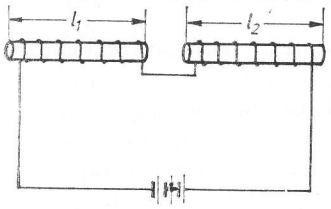


Fig. 4

a) raportul numerelor de spire ale celor două bobine;

b) raportul volumelor celor două miezuri;

c) rezistența internă a sursei.

151. Să se scrie, indicînd semnificațiile fizice ale parametrilor care intervin:

a) expresia legii Hooke;

b) expresiile vitezei de propagare a perturbațiilor longitudinale în solide, respectiv a perturbațiilor transversale în corzi;
c) expresia dependenței rezistenței unui conductor de dimensiunile și natura conductorului.

152. Să se definească:
a) presiunea;
b) potențialul electric și tensiunea electrică;
c) panta caracteristicii și factorul de amplificare al unei triode.

E. ÎNVĂȚĂMÎNT SUPERIOR MEDICAL

a. Concursul de admitere din iulie 1978

153. Tratați următoarele subiecte:
a) transformări simple în gaze;
b) variația relativistă a masei cu viteza;
c) postulatele lui Bohr.

154. Răspundeți la următoarele întrebări:
a) Care este valoarea temperaturii absolute a punctului triplu al apei?
b) De ce căldura specifică la presiune constantă este mai mare decît căldura specifică la volum constant?
c) Care este condiția pentru obținerea maximelor de interferență (franjele luminoase)?
d) Un sistem care se rotește față de un sistem inerțial este tot inerțial?
e) Enunțați legea deplasării la emisia radiației beta-minus de către nucleele radioactive.
f) Definiți numărul atomic și numărul de masă.

155. Tratați următoarele subiecte:
a) Măsurări calorimetrice.
b) Compunerea vitezelor în mecanica clasică.
Compunerea vitezelor în mecanica relativistă.
c) Alcătuirea nucleului atomic.
Protonul. Neutronul.

156. Răspundeți pe scurt la următoarele întrebări:
a) Exprimați densitatea unui gaz ideal în funcție de temperatura absolută și presiune.

b) Cum influențează presiunea exterioară temperatura de fierbere?
c) Definiți drumul optic al unei raze de lumină într-un mediu oarecare.
d) Ce este inversiunea liniilor spectrale?
e) Ce valori poate lua numărul cuantic magnetic pentru o valoare l a numărului cuantic orbital?
f) Desenați schema de principiu a contorului Geiger-Müller și arătați părțile componente.

b. Concursul de admitere din iulie 1979

157. Un motor termic lucrează după un ciclu Carnot reversibil, folosind 2 moli heliu (asimilat cu un gaz perfect). În cursul destinderii izoterme, gazul primește o cantitate de căldură egală cu 20% din căldura rezultată prin arderea a 1,5 g petrol, atingînd la finele acestei transformări starea în care presiunea gazului devine $p_1 = 10^5$ N · m^{-2}, iar volumul său $V_1 = 99{,}7$ l. Știind că temperatura sursei reci este $t_2 = 27°C$, să se determine:
a) temperatura t_1 în grade Celsius a sursei calde;
b) randamentul motorului;
c) lucrul mecanic efectuat în cursul destinderii izoterme.
Se dau: puterea calorică a petrolului, $q = 4{,}6 \cdot 10^7$ J · kg^{-1}; constanta gazelor perfecte, $R = 8\,310$ J · kmol^{-1} · K^{-1}.

158. Un fascicul paralel de radiații monocromatice este trimis perpendicular pe o rețea plană de difracție cu perioada $d = 10{,}5$ μm și cu ajutorul unei lentile de distanță focală $f = 0{,}24$ m, așezată paralel cu planul rețelei, se proiectează radiațiile difractate pe un ecran aflat în planul focal al lentilei. Știind că radiațiile corespund liniei Balmer de cea mai mare lungime de undă $\lambda = 656{,}3$ nm, să se determine:
a) valoarea constantei Rydberg;
b) unghiul de deviație, față de direcția de incidență, al fasciculului corespunzător maximului de difracție de ordinul $n = 8$;
c) distanța dintre pozițiile maximului central și a primului maxim de difracție pe ecranul de observație.

159. Să se scrie, indicînd semnificațiile fizice ale parametrilor care intervin:
a) legile dilatației liniare, superficiale și volumice;
b) pozițiile (abscisele) franjelor luminoase, respectiv întunecoase, pe ecranul dispozitivului Young;
c) expresia razei traiectoriei unui ion într-un spectrograf de masă.

160. Să se enunțe:
a) primul principiu al termodinamicii;
b) principiul teoriei relativității;
c) legile de conservare pentru reacții nucleare.

161. Să se definească:
a) entropia, indicînd proprietățile sale de bază;
b) numerele cuantice principal și orbital;
c) constanta de dezintegrare și timpul de înjumătățire din legea dezintegrării radioactive.

162. Într-un calorimetru de capacitate calorică neglijabilă se introduc 0,1 kg gheață aflată la temperatura $t_1 = 0°C$ și un cub din alamă de masă $m = 1{,}1$ kg, avînd temperatura $t = 100°C$. Știind că temperatura finală a amestecului este $\theta = 10°C$, să se determine:
a) căldura specifică a alamei;
b) volumul și densitatea cubului de alamă la temperatura finală (θ), latura cubului la 0°C fiind $l_0 = 5{,}2$ cm;
c) forța care trebuie aplicată asupra fețelor cubului pentru ca volumul său la temperatura $t = 100°C$ să fie egal cu cel corespunzînd temperaturii θ.
Se dau: căldura specifică a apei, $c_1 = 4\,180$ J · kg^{-1} · K^{-1}; căldura latentă de topire a gheții, $\lambda_1 = 334{,}4$ kJ · kg^{-1}; coeficientul de dilatare liniară al alamei, $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}$ K^{-1} și modulul de elasticitate al alamei, $E = 9{,}8 \cdot 10^{10}$ N · m^{-2}.

163. Cunoscînd valorile constantei Rydberg, $R = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ Hz, constantei lui Planck, $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J · s și vitezei luminii în vid, $c = 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1}, să se determine:
a) cea mai mare lungime de undă pe care o poate avea o linie spectrală Balmer și numerele cuantice corespunzînd nivelelor între care se produce respectiva tranziție;
b) valorile energiei totale a electronului atomului de hidrogen, corespunzînd celor două stări cuantice;
c) perioada unei rețele de difracție știind că — în cazul cînd se trimite perpendicular pe această rețea un fascicul monocromatic corespunzînd liniei Balmer considerate — maximul de difracție de ordinul 2 corespunde unui unghi de deviație α față de direcția de incidență, astfel încît $\sin \alpha = 0{,}101$.

164. Să se scrie, indicînd semnificațiile fizice ale parametrilor implicați:
a) ecuația fundamentală a termodinamicii;

b) legea gazului ideal (Mendeleev-Clapeyron) și expresia energiei interne a gazului ideal;
c) expresiile relativiste ale dependenței masei de viteză și energiei cinetice.

165. Să se enunțe:
a) al doilea principiu al termodinamicii;
b) legile deplasării pentru tranzițiile radioactive α, respectiv β;
c) legile efectului fotoelectric.

166. Să se definească:
a) punctele triplu și critic ale unei substanțe;
b) numerele cuantice magnetic și de spin;
c) energia de reacție, reacțiile exoenergetice și endoenergetice, și masa critică.

II. REZOLVĂRI

A

1. Se tratează conform manualului de liceu.

2. *a*) $a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$, $a' = g \sin \alpha$;

$v = \sqrt{2al} = \sqrt{2gl(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}$;

$v' = \sqrt{2al} = \sqrt{2gl \sin \alpha}$.

$$\frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{1}{2}, \quad \mu = \frac{3}{4} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

b) $\Delta t = \dfrac{Q}{m c}$;

$Q = 0{,}6\ L_f = 0{,}6\ F_{fr} l$; $F_{fr} = \mu G \cos \alpha = \mu mg \cos \alpha$.

$$\Delta t = 0{,}6 \frac{\mu g l \cos \alpha}{c} = 0{,}6 \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{460} \cong 0{,}039 \text{ K}.$$

3. *a*) $c_p = \dfrac{Q}{m \Delta T}$; $c_p = \dfrac{9\,160}{2 \cdot 5} = 916 \dfrac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

b) $L_{ef} = p(V_2 - V_1)$.

$pV_1 = \dfrac{m}{M} R T_1$; $pV_2 = \dfrac{m}{M} R T_2$.

$L_{ef} = \dfrac{m}{M} R \Delta T = \dfrac{2}{32} \cdot 8\,310 \cdot 5 = 2\,597$ J.

c) $\Delta U = Q - L_{ef} = 9\,160 - 2\,597 = 6\,563$ J.

4. Se tratează conform manualului de liceu.

5. $$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \rightarrow \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

$$\frac{mv^2}{r} = evB \rightarrow v = \frac{eBr}{m}.$$

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{eBr}{mc}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{eBr}{m_0 c}\right)^2 \left(\frac{m}{m_0}\right)^{-2}}};$$

$$\frac{m}{m_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{eBr}{m_0 c}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-1}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8}\right)^2} \cong 1{,}59.$$

6. *a*) Dacă notăm distanța între fante cu a, distanța de la centrul figurii de interferență la punctul de observație cu x, diferența de drum cu d și distanța fante — ecran cu D, avem:

$$x = \frac{dD}{a}.$$

Pentru distanța de la franja centrală, de ordinul zero, la cea de primul ordin, care-i tocmai interfranja, $d = \lambda$, așa că:

$$x = \frac{\lambda D}{a} = \frac{5 \cdot 10^{-7} \cdot 1{,}2}{5 \cdot 10^{-4}} = 1{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

b) Conform formulei de mai sus, interfranja se dublează dacă distanța dintre fante, a, se reduce la jumătate.

c) Cînd dispozitivul este cufundat într-un lichid cu $n = 1{,}5$, lungimea de undă λ' a sursei se schimbă față de cea în aer, λ:

$\lambda' = \lambda / n = 5 \cdot 10^{-7} / 1{,}5 = 3{,}33 \cdot 10^{-7}$ m.

Deci:

$$x' = \frac{\lambda' D}{a} = \frac{3{,}33 \cdot 10^{-7} \cdot 1{,}2}{5 \cdot 10^{-4}} = 0{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

7. *a*) $h_m = \dfrac{v_1^2}{2g} = \dfrac{20^2}{2 \cdot 10} = 20$ m.

$E_p = mgh = 0{,}47 \cdot 10 \cdot 20 = 94$ J.

$t_u = \dfrac{v_1}{g} = \dfrac{20}{10} = 2$ s; deci corpul atinge înălțimea maximă, h_m, înainte de a fi lovit de glonte.

$b)\ v_1 t - \frac{gt^2}{2} = v_2(t - \Delta t) - \frac{g}{2}(t - \Delta t)^2,$

de unde

$$t = \frac{(g\Delta t + 2v_2)\,\Delta t}{2(v_2 + g\Delta t - v_1)} = \frac{(10{,}2 + 2 \cdot 100)2}{2(100 + 2 \cdot 10 - 20)} = 2{,}2 \text{ s.}$$

$$h = -\frac{1}{2} g t^2 + v_1 t = -\frac{1}{2} 10 \cdot 2{,}2^2 + 20 \cdot 2{,}2 = 19{,}8 \text{ m.}$$

$c)\ v_1' = g(t - \Delta t) = 10(2{,}2 - 2) = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$

$v_2' = v_2 - g(t - \Delta t) = 100 - 10(2{,}2 - 2) = 98 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$

$$v = \frac{-m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1 + m_2} = \frac{-0{,}47 \cdot 2 + 0{,}03 \cdot 98}{0{,}47 + 0{,}03} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ (în sus).}$$

8. $a)\ T_2^2 = T_2 T_4 = \frac{p_2 V_2}{R} \cdot \frac{p_4 V_4}{R} = \frac{p_3 V_1}{R} \cdot \frac{p_1 V_3}{R} = T_1 T_3;$

$$T_4 = T_2 = \sqrt{T_1 T_3} = \sqrt{300 \cdot 432} = 360 \text{ K.}$$

$b)\ L = (p_2 - p_1)(V_4 - V_1) = p_2 V_4 - p_1 V_4 - p_2 V_1 + p_1 V_1 = p_3 V_3 - p_4 V_4 - p_2 V_2 + p_1 V_1 = n \cdot R(T_1 + T_3 - 2T_2) = 8{,}31(300 + 432 - 2 \cdot 360) = 99{,}72 \text{ J.}$

$$c)\ \Delta U_{12} = \frac{3}{2} nR(T_2 - T_1) = \frac{3}{2} \cdot 8{,}31 \cdot 60 = 747{,}9 \text{ J.}$$

$$\Delta U_{23} = \frac{3}{2} nR(T_3 - T_2) = \frac{3}{2} \cdot 8{,}31 \cdot 72 = 897{,}48 \text{ J.}$$

$$Q_1 = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + L = \frac{3}{2} nR(T_3 - T_1) + p_2(V_3 - V_2) = \frac{3}{2} nR(T_3 - T_1) + nR(T_3 - T_2) = 2\,243{,}7 \text{ J.}$$

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{99{,}72}{2\,243{,}7} = 4{,}45\%.$$

9. $a)\ m_1 c_1(t_f - t_1) = m_2 c_2(t_2 - t_f);$

$$t_f = \frac{m_2 c_2 t_2 + m_1 c_1 t_1}{m_1 c_1 + m_2 c_2} = 40°\text{C.}$$

$$b)\ \rho_2 = \frac{1}{1 + \gamma \Delta t} \rightarrow \gamma = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\Delta t \cdot \rho_2} = \frac{m_1 - m_2}{\Delta t \cdot m_2};$$

$$\alpha = \frac{1}{3}\gamma = \frac{m_1 - m_2}{3 \cdot \Delta t \cdot m_2} = \frac{3{,}6 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 50 \cdot 2} = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}.$$

$$c)\ F = E \cdot S \cdot \alpha \Delta t = E \cdot \frac{m}{\rho l} \cdot \alpha \cdot \Delta t =$$

$$= 2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot \frac{2}{7\,800 \cdot 0{,}5} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 50 = 6{,}46 \cdot 10^4 \text{N.}$$

10, 11. Se tratează conform manualului de liceu.

12. $a)\ C_a = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 10^{12} \cdot 25 \cdot 10^{-6}} = 1{,}01 \text{ nF.}$

$$P = U \cdot I \cos\varphi = U \cdot I_R = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{I^2 Z^2}{R} = \frac{I^2}{R}\left[\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2\right]^{-1};$$

$$P_{max} = RI^2 = 10^3 \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 2{,}5 \text{ W.}$$

$b)\ P(C_{1,2}) = \frac{1}{2} P_{max}$ implică $C_{1,2}\,\omega - \frac{1}{L\omega} = \pm \frac{1}{R},$

de unde $(C_1 - C_2)\omega = \frac{2}{R}$ și cum $C_a \omega = \frac{1}{L\omega},$

rezultă că:

$$\frac{C_1 - C_2}{C_a} = \frac{2L\omega}{R} = \frac{2 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 10^6}{10^3} \simeq 0{,}314.$$

$c)\ \lambda = vT = \frac{c}{\nu\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^6\sqrt{1 \cdot 25}} = 60 \text{ m.}$

13. *a)* $E_c = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)$,

de unde

$$\frac{m-m_0}{m_0}=\frac{E_c}{m_0c^2}=\frac{10^8\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{6{,}65\cdot 10^{-27}\cdot 9\cdot 10^{16}}\cong 0{,}027.\ (\text{cca } 2{,}7\,\%)$$

$$v=c\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{m_0c^2+E_c}\right)^2}\simeq 6{,}84\cdot 10^7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

b) $$B=\frac{m(v)v}{qR}=\frac{6{,}8\cdot 10^{-27}\cdot 0{,}684\cdot 10^8}{3{,}2\cdot 10^{-19}\cdot 1}=1{,}45\ \text{T}.$$

$$\nu=\frac{qB}{2\pi m}=\frac{3{,}2\cdot 10^{-19}\cdot 1{,}45}{6{,}28\cdot 6{,}8\cdot 10^{-27}}=10{,}9\ \text{MHz}.$$

c) $$A=\frac{\pi}{2}(R_n^2-R_{n-1}^2)=\frac{\pi}{2q^2B^2}(p_n^2-p_{n-1}^2)=\frac{\pi m}{q^2B^2}(W_n-W_{n-1})=$$

$$=\frac{2\pi mU}{qB^2};$$

$$A=\frac{2\pi\cdot 6{,}8\cdot 10^{-27}\cdot 2\cdot 10^3}{3{,}2\cdot 10^{-19}\cdot 1{,}45^2}\simeq 4\pi\cdot 10^{-5}\ \text{m}^2\ (=1{,}26\ \text{cm}^2).$$

$$t=\frac{\pi R^2}{2A}\cdot T=\frac{\pi\cdot 1^2}{2\cdot 4\pi\cdot 10^{-5}}-\frac{1}{10{,}9\cdot 10^6}\simeq 37\ \mu\text{s}.$$

14. *a)* $d\sin\alpha = n\lambda$,

deci

$$\nu=\frac{c}{\lambda}=\frac{nc}{d\sin\alpha}=\frac{2\cdot 3\cdot 10^8}{1{,}65\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}5}=7{,}27\cdot 10^{14}\ \text{Hz}.$$

Întrucît:

$$\left(\frac{\nu}{R}\right)_{\text{maxim seria Paschen}}=\frac{1}{3^2}<\frac{\nu}{R}=\frac{7{,}27\cdot 10^{14}}{3{,}28\cdot 10^{15}}\simeq 0{,}2216<$$

$$<\left(\frac{\nu}{R}\right)_{\text{minim seria Lyman}}=1-\frac{1}{2^2}=0{,}75,$$

linia spectrală studiată nu poate aparține decît seriei Balmer ($k=2$). Rezultă:

$$\frac{\nu}{R}=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2},\ \text{de unde}\ n=2\sqrt{\frac{R}{R-4\nu}}=6.$$

b) $h\nu = eU_0 + E_{ex}$,

deci

$$U_0=\frac{h\nu-E_{ex}}{e}\cong\frac{6{,}6\cdot 10^{-34}\cdot 7{,}27\cdot 10^{14}}{1{,}6\cdot 10^{-19}}-1{,}9=1{,}1\ \text{V}.$$

c) Numărul fotonilor incidenți în unitatea de timp pe 1 m² de arie a fotocatodului este $N=\frac{E}{h\nu}$, iar variația impulsului lor — egală cu presiunea exercitată de fotoni asupra fotocatodului — este:

$$p=\frac{E}{h\nu}\cdot\frac{h\nu}{c}=\frac{5\cdot 10^{-4}\cdot 10^4}{3\cdot 10^8}=1{,}67\cdot 10^{-8}\ \text{N}\cdot\text{m}^{-2}.$$

15, 16. Se tratează conform manualului de liceu.

B

17. *a)* $F=\mu G_1=0{,}1\cdot 50=5\ \text{N}.$

$$m_2g=a(m_1+m_2)+\mu G_1;$$

$$a=\frac{m_2g-\mu G_1}{m_1+m_2}=\frac{5\cdot 10-0{,}1\cdot 50}{\frac{50}{10}+5}=4{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$T=m_1a+\mu G_1=\frac{50}{10}\cdot 4{,}5+0{,}1\cdot 50=27{,}5\ \text{N}.$$

b) $m_2'g=\mu G_1;\quad m_2'=\frac{\mu G_1}{g}=\frac{0{,}1\cdot 50}{10}=0{,}5\ \text{kg}.$

18. *a)* $p_1V_1=nRT;\quad p_1=n\frac{RT}{V_1}=\frac{8{,}31\cdot 300}{0{,}15\cdot 100\cdot 10^{-4}}=1{,}662\cdot 10^6\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$

b) $p_2V_2 = p_1V_1$; $V_2 = V_1 - Sv\Delta t$.

$$p_2 = \frac{p_1V_1}{V_1 - Sv\Delta t} = \frac{1{,}662 \cdot 10^6 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}}{1{,}5 \cdot 10^{-3} - 10^{-2} \cdot 10^{-2} \cdot 5} = 2{,}493 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

$$p_2 - p_1 = 2{,}493 \cdot 10^6 - 1{,}662 \cdot 10^6 = 8{,}31 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

19. $R_A = (n_1 - 1)R_1 \rightarrow R_1 = \dfrac{R_A}{n_1 - 1}$;

$R_A = (n_2 - 1)R_2 \rightarrow R_2 = \dfrac{R_A}{n_2 - 1}$.

a) $R_A = (n_p - 1)\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = (n_p - 1)\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}\right) =$

$= (n_p - 1)\dfrac{1}{\dfrac{n_1 - 1}{R_A} + \dfrac{n_2 - 1}{R_A}}$;

$n_p = n_1 + n_2 - 1$.

b) $R_A = (n_s - 1)(R_1 + R_2) = (n_s - 1)\left(\dfrac{R_A}{n_1 - 1} + \dfrac{R_A}{n_2 - 1}\right)$;

$1 = (n_s - 1)\left(\dfrac{1}{n_1 - 1} + \dfrac{1}{n_2 - 1}\right)$;

$n_s = \dfrac{n_1n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2}$.

Variantă

$R_A = (n_s - 1)\ R_s = (n_p - 1)\ R_p$,

$R_s = R_1 + R_2$; $R_p = \dfrac{R_1\ R_2}{R_1 + R_2}$.

$n_s = \dfrac{R_A}{R_1 + R_2} + 1$; $n_p = \dfrac{R_A}{R_1} + \dfrac{R_A}{R_2} + 1$.

20, 21, 22. Se tratează conform manualului de liceu.

23. *a)* $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 10\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2{,}5\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$;

$v = \sqrt{2\ al} = \sqrt{2 \cdot 2{,}5 \cdot 40} = 14{,}1\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) $a_1 = \mu g = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\ 10 = \dfrac{5}{\sqrt{3}}\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$;

$d = \dfrac{v^2}{2a_1} = \dfrac{200}{2\dfrac{5}{\sqrt{3}}} = 20\sqrt{3} \cong 34{,}6$ m.

24. *a)* $Q_p = (m_1c_1 + m_2c_2)(\theta - t_1)$; $Q_C = m_3c_1(t_2 - \theta)$.

$Q_p = Q_C$.

$c_1 = \dfrac{m_2c_2(\theta - t_1)}{m_3(t_2 - \theta) - m_1(\theta - t_1)} = \dfrac{0{,}5 \cdot 4\ 190\ (22{,}5 - 15)}{0{,}56\ (100 - 22{,}5) - 0{,}3(22{,}5 - 1)} =$

$= 380\ \dfrac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.*

b) $C = m_1c_1 = 0{,}3 \cdot 380 = 114\ \dfrac{\text{J}}{\text{K}}$.

* Întrucît în enunț nu a fost specificată valoarea căldurii specifice a apei, $c_a = 4\ 190\ \dfrac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, acordarea notei maxime nu a fost condiționată de efectuarea calculelor numerice.

25. *a)* $Z = \sqrt{R^2 + 4\pi^2\nu^2L^2} = 10\sqrt{2}\ \Omega$;

$I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{220}{10\sqrt{2}} = 15{,}51$ A.

b) $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z} = \dfrac{10}{10\sqrt{2}} \cong 0{,}7$;

$W = UIt\cos\varphi = 220 \cdot 15{,}51 \cdot 2 \cdot 60 \cdot 0{,}7 \simeq 2{,}904 \cdot 10^5$ J.

26, 27, 28. Se tratează conform manualului de liceu.

29. $Q_{cedat} = m_v(\lambda_v + c_a t_v)$; $Q_{primit} = m_2\lambda_g$.

$$m_v = \frac{m_2\lambda_g}{\lambda_v + c_a t_v} = \frac{0{,}5 \cdot 3{,}34 \cdot 10^5}{2{,}26 \cdot 10^6 + 4\,180 \cdot 10^2} = 0{,}062 \text{ kg}.$$

$$M = m_1 + m_2 + m_v = 3{,}562 \text{ kg}.$$

30. *a)* $m_1 = \frac{pVM}{RT_1} = \frac{0{,}98 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 29}{8\,310 \cdot 283} \cong 60{,}4$ kg.

$$m_2 = \frac{pVM}{RT_2} = \frac{0{,}98 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 29}{8\,310 \cdot 293} \cong 58{,}3 \text{ kg};$$

$$m = m_1 - m_2 = 2{,}1 \text{ kg}.$$

b) $m_x q = m_1 c_v \Delta t$;

$$m_x = \frac{m_1 c_v \Delta t}{q} = \frac{60{,}4 \cdot 715 \cdot 10}{3 \cdot 10^7} = 0{,}0144 \text{ kg}.$$

31. *a)* $2m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$,

$$v = \frac{\sqrt{3}c}{2} \cong \frac{1{,}732}{2} \cdot 3 \cdot 10^8 = 2{,}598 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$E_c = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 8{,}19 \cdot 10^{-14} \text{ J}.$$

b) $E_f = h\nu$,

$$\nu = \frac{E_f}{h} = \frac{8{,}19 \cdot 10^{-14}}{6{,}6 \cdot 10^{-34}} = 1{,}24 \cdot 10^{20} \text{ Hz};$$

$$m_f = \frac{h\nu}{c^2} = m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}.$$

32, 33, 34. Se tratează conform manualului de liceu.

35. *a)* $F_1 = G_t + F_f = mg \sin \alpha + F_f$,

$F_2 = G_t - F_f = mg \sin \alpha - F_f$,

$F_f = \mu G_n = \mu mg \cos \alpha$;

deci

$F_1 = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$,

$F_2 = mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$;

$$\sin \alpha = \frac{F_1 + F_2}{2mg} = \frac{35{,}1 + 13{,}9}{2 \cdot 5 \cdot 9{,}8} = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 30°.$$

b) $$\mu = \frac{F_1 - F_2}{2mg \cos \alpha} = \frac{35{,}1 - 13{,}9}{2 \cdot 5 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0{,}25$$

sau

$F_1 = ma_u = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$,

$F_2 = ma_c = mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$.

36. *a)* $Q_2 = Q_1 - L = L\left(\frac{1}{\eta} - 1\right) = L\left(\frac{T_1}{T_1 - T_2} - 1\right) = \frac{P \cdot t}{T_1 - T_2} \cdot T_2 =$

$$= \frac{10^3 \cdot 600 \cdot 300}{500 - 300} = 9 \cdot 10^5 \text{ J};$$

$$\Delta t = \frac{\eta_t Q_2}{mc} = \frac{\eta_t Q_2}{\rho l_0 Sc} = \frac{0{,}3 \cdot 9 \cdot 10^5}{7\,800 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 460} \cong 75{,}2 \text{ K}.$$

b) $\Delta l = l_0 \alpha \Delta t = 2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 75{,}2 \cong 1{,}8048 \cdot 10^{-3}$ m $\cong 1{,}8$ mm;

$F = E \cdot S \cdot \alpha \Delta t = 2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 75{,}2 =$

$= 9{,}47 \cdot 10^4$ N.

37. *a)* $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + (160 - 120)^2} = 50\ \Omega$;

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{50} = 4{,}4 \text{ A}.$$

b) $$L = \frac{1}{\omega} \cdot X_L = \frac{160}{2\pi \cdot 50} = 0{,}509 \text{ H},$$

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 120} = 26{,}5 \ \mu\text{F};$$

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0{,}509 \cdot 26{,}5 \cdot 10^{-6}}} \cong 43{,}5 \text{ Hz}.$$

38, 39, 40. Se tratează conform manualului de liceu.

41. *a)* $a = \frac{mg}{k} = \frac{0{,}1 \cdot 9{,}8}{10} = 0{,}098$ m.

$x = a \sin(\omega t + \varphi)$ și întrucît $x(t = 0) = -a$:

$-a = a \sin \varphi$, deci $\sin \varphi = -1$ și $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0{,}1}} = 10 \text{ s}^{-1}$.

$x = 0{,}098 \sin\left(10t - \frac{\pi}{2}\right)$.

b) $\Delta l_{max} = 2a = 0{,}196$ m.

Observații. S-a acordat nota maximă și în cazurile:

1. cînd candidatul a presupus $x(t = 0) = +a$, obținînd $\varphi = \frac{\pi}{2}$;

2. cînd s-a obținut rezultatul corect privind Δl_{max}, pornind de la constatarea că:

$mg\ \Delta l_{max} = \frac{k}{2} (\Delta l_{max})^2$.

42. *a)* $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$;

$T_1 = t_1 + 273$, $T_2 = t_2 + 273$;

$\eta = \frac{500 - 300}{500} = 0{,}4$.

b) $Q_1 = \frac{L}{\eta} = \frac{400}{0{,}4} = 1\,000$ J;

$Q_2 = Q_1 - L = 1\,000 - 400 = 600$ J.

43. *a)* $\frac{mv^2}{r} = evB$,

$r = \frac{mv}{eB} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 10^6}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-2}} \cong 2{,}84 \cdot 10^{-3}$ m.

b) $B_1 = \mu_0 \cdot \frac{I}{2r}$, $I = \frac{ne}{\frac{2\pi r}{v}} = \frac{nev}{2\pi r}$;

$B_1 = \mu_0 \cdot \frac{nev}{4\pi r^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{10^{10} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^6}{4\pi (2{,}84 \cdot 10^{-3})^2} \cong 9{,}92 \cdot 10^{-5}$ T.

44, 45, 46. Se tratează conform manualului de liceu.

47. *a)* $G_{aparentă} = G - F_{arh}$;

$G = m \cdot g$, $F_{arh} = V_{corp}\, \rho_{corp} \cdot g$;

$V_{corp} = \frac{m \cdot g - G_{aparentă}}{\rho_{apă} \cdot g} = \frac{16 \cdot 10 - 135}{10^3 \cdot 10} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ m^3.

b) $V_{aliaj} = \frac{m}{\rho_{aliaj}}$; $V_{aliaj} = \frac{16}{8 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-3}$ m^3.

$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V_{corp} - V_{aliaj}}{V_{corp}}$; $\frac{\Delta V}{V} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}}{2{,}5 \cdot 10^{-3}} = 0{,}2$ (20%).

48. *a)* $m_{bară} = \rho \cdot V = \rho S l_1 = 7\,800 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 1 = 7{,}8$ kg.

$Q_{primit} = m_{bară} \cdot c(t_2 - t_1)$, $Q_{ardere} = m_{petrol} \cdot q$;

$Q_{primit} = Q_{ardere}$,

deci: $t_2 = t_1 + \frac{m_{petrol} \cdot q}{m_{bară} \cdot c}$; $t_2 = 25 + \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot 40 \cdot 10^6}{7{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 10^3} = 538°\text{C}$.

b) $l_{t2} \cong l_{t1}(1 + \alpha \Delta t) = 1(1 + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 513) = 1{,}0062$ m.

$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1{,}0062 - 1}{1} = 0{,}0062$.

$F = E \cdot S \cdot \frac{\Delta l}{l}$; $F = 1{,}96 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}0062 = 1{,}215 \cdot 10^6$ N.

Varianta 1 pentru b)

$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta t$; $\frac{\Delta l}{l} = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 513 = 0{,}0062$,

apoi, ca mai sus.

Varianta 2 pentru b)

$F = E \cdot S \cdot \alpha\Delta t$; $F = 1{,}96 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-3} \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 513 = 1{,}215 \cdot 10^{6}$ N.

49. *a)* $T = \dfrac{\lambda}{c}$; $T = \dfrac{750}{3 \cdot 10^{8}} = 25 \cdot 10^{-7}$ s.

$\nu = \dfrac{1}{T}$; $\nu = \dfrac{1}{25 \cdot 10^{-7}} = 4 \cdot 10^{5}$ Hz.

b) $\dfrac{1}{\omega C} = \omega L$, $C = \dfrac{\varepsilon S}{d}$, $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$;

$\varepsilon_r = \dfrac{d}{\varepsilon_0 S \omega^2 \cdot L}$; $\varepsilon_r = \dfrac{10^{-4}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2} \cdot (2\pi \cdot 4 \cdot 10^{5})^2 \cdot 8 \cdot 10^{-5}} = 6.$

50, 51. Se tratează conform manualului de liceu.

52. *a)* $F = k \cdot x$; $k = \dfrac{F}{x} = \dfrac{10}{2 \cdot 10^{-2}} = 5 \cdot 10^{2}$ N $\cdot$ m^{-1}.

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{1}{0{,}1} \cdot 5 \cdot 10^{2}} \simeq 70$ s^{-1}.

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2 \cdot 3{,}14}{70} \simeq 0{,}089$ s.

$\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{0{,}089} \simeq 11{,}1$ Hz.

b) $x = a \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, $\pm \dfrac{a}{2} = a \cdot \cos(\omega t + \varphi)$;

deci $\cos(\omega t + \varphi) = \pm \dfrac{1}{2}$, iar $\sin(\omega t + \varphi) = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$W_c = \dfrac{1}{2} m v^2 = \dfrac{1}{2} m a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$,

$W_p = \dfrac{1}{2} \omega^2 x^2 = \dfrac{1}{2} m a^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$.

În cazul particular considerat:

$W_c = \dfrac{3}{8} m a^2 \omega^2$, $W_p = \dfrac{1}{8} m a^2 \omega^2$,

deci la o distanță de origine egală cu jumătatea amplitudinii:

$\dfrac{W_c}{W_p} = 3.$

53. *a)* $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$; $T_1 = \dfrac{T_2}{1 - \eta} = \dfrac{300}{1 - 0{,}4} = 500$ K.

b) $P_c = 0{,}5 \cdot \dfrac{mq}{t}$; $P_c = 0{,}5 \cdot \dfrac{36 \cdot 3 \cdot 10^{7}}{3\,600} = 1{,}5 \cdot 10^{5}$ W.

$Q_1 = P_c \cdot t$; $Q_1 = 60 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{5} = 9 \cdot 10^{6}$ J.

$\eta = \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$; $Q_2 = Q_1(1 - \eta)$;

$Q_2 = 9 \cdot 10^{6}(1 - 0{,}4) = 5{,}4 \cdot 10^{6}$ J.

54. *a)* $P_u = R \cdot I^2$, $I = \dfrac{E}{R + r}$, deci $P_u = \dfrac{R \cdot E^2}{(R + r)^2}$.

Pentru ca P_u = maxim, trebuie ca: $\dfrac{dP_u}{dR} = 0$.

$E^2(R + r)^2 - 2R \cdot E^2(R + r) = 0$; $R = r = 0{,}5$ Ω.

Variantă punctul a)

$P_u = \dfrac{E^2}{\left(\sqrt{R} - \dfrac{r}{\sqrt{R}}\right)^2 + 4r}$,

de unde, pentru ca P_u = maxim: $\sqrt{R} - \dfrac{r}{\sqrt{R}} = 0$,

cu soluția: $R = r = 0{,}5$ Ω.

b) $P_{u,\,max} = \dfrac{rE^2}{(r + r)^2} = \dfrac{E^2}{4r}$.

$P_c = (R + r)\, I^2$; în cazul considerat: $P_c = 2r\left(\frac{E}{2r}\right)^2 = \frac{E^2}{2r}$.

$\eta = \frac{P_u}{P_c} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ (50\%)$.

55, 56. Se tratează conform manualului din liceu.

57. *a)* $F_f = \mu(G - F\cos\theta)$;

$$a = \frac{F\sin\theta - \mu(G - F\cos\theta)}{m} = \frac{5 \cdot 0{,}5 - 0{,}1\left(1 \cdot 10 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1} =$$

$= 1{,}93\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

b) $v = \sqrt{2ad}$; deci trebuie ca $a = a_{max}$.

$$a = \frac{F}{m}(\sin\theta + \mu\cos\theta) - \mu g = \frac{F}{m}\sqrt{1 + \mu^2}\,\sin(\theta + \varphi) - \mu g,$$

unde $\varphi = \text{arc tg}\ \mu$.

Rezultă:

$$(\theta)_{v = v_{max}} = \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg}\ 0{,}1 = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{10}\right)\text{rad} =$$

$$= \frac{180}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{10}\right)^0;$$

$$v_{max} = \sqrt{2a_{max}d} = \sqrt{2\left(\frac{F}{m}\sqrt{1 + \mu^2} - \mu g\right)d} =$$

$$= \sqrt{2\left(\frac{5}{1}\sqrt{1 + (0{,}1)^2} - 0{,}1 \cdot 10\right)50} \cong 20\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

c) Corpul rămîne în repaus pentru $a \leqslant 0$, oricare ar fi unghiul θ. Rezultă că:

$$\frac{F}{m}\sqrt{1 + \mu^2} \leqslant \mu g;$$

$$F_{max} = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}\, mg = \frac{0{,}1}{\sqrt{1 + (0{,}1)^2}}\, 1 \cdot 10 \cong 0{,}995\ \text{N}.$$

58. *a)* $L = p \cdot \Delta V = p \cdot \frac{1}{p}\frac{m}{M} R \cdot \Delta T = \frac{m}{M} R \cdot \Delta T =$

$$= \frac{0{,}2}{4} \cdot 8\,310 \cdot 200 = 83{,}1\ \text{kJ}.$$

b) $Q_p = \Delta U + p \cdot \Delta V = \frac{m}{M}\frac{3}{2}\Delta(pV_M) + p \cdot \Delta V =$

$$= \frac{m}{M}\frac{3}{2} R \cdot \Delta T + p \cdot \frac{m}{M}\frac{1}{p} R \cdot \Delta T = \frac{5}{2}\frac{m}{M} R \cdot \Delta T =$$

$$= \frac{5}{2}\frac{0{,}2}{4}\, 8\,310 \cdot 200 = 207{,}75\ \text{kJ}.$$

$$Q_v = \Delta U = \frac{3}{2}\frac{m}{M} R \cdot \Delta T = \frac{3}{2}\frac{0{,}2}{4}\, 8\,310 \cdot 200 = 124{,}65\ \text{kJ}.$$

c) $m_{c_p} = \frac{Q_p}{\eta q} = \frac{207{,}75 \cdot 10^3}{0{,}5 \cdot 2{,}2 \cdot 10^7} = 18{,}89 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}.$

$$m_{c_v} = \frac{Q_v}{\eta q} = \frac{124{,}65 \cdot 10^3}{0{,}5 \cdot 2{,}2 \cdot 10^7} = 11{,}33 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}.$$

59. *a)* $X_L = L\omega = 34{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 200 = 6{,}92$;

$$\varphi_L = \text{arctg}\frac{X_L}{R} = \text{arctg}\frac{6{,}92}{4} \cong 60°.$$

b) $U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ \text{V}$;

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{1\,712 \cdot 10^{-6} \cdot 200} = 2{,}92\ \Omega;$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{4^2 + (6{,}92 - 2{,}92)^2} = 4\sqrt{2}\ \Omega;$$

$$I_{ef} = \frac{U}{Z} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 0{,}25\ \text{A}.$$

c) $\varphi = \text{arctg}\,\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \text{arctg}\,\frac{6{,}92 - 2{,}92}{4} = 45°.$

$$P = U_{ef} I_{ef} \cos \varphi = \sqrt{2} \cdot 0{,}25 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}25 \text{ W};$$

$$P_r = U_{ef} I_{ef} \sin \varphi = \sqrt{2} \cdot 0{,}25 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}25 \text{ VAR};$$

$$P_a = U_{ef} I_{ef} = \sqrt{2} \cdot 0{,}25 \cong 0{,}353 \text{ VA}.$$

60, 61. Se tratează conform manualului de liceu.

62. *a*) $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$; $m_1 v_1 = m_2 v_2$,

de unde $m_1 = m_2 = 1$ kg.

b) Deoarece $m_1 = m_2$, rezultă $v_1 = v_2$.

$v_0^2 - v_1^2 = 2 a_{fr} \cdot d$; $a_{fr} = \frac{F_r}{m} = \frac{\mu G}{m} = \mu g$.

$$\mu = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2gd} = \frac{10^2 - 9^2}{2 \cdot 10 \cdot 50} = 0{,}019.$$

c) $F = k y_{min} = \mu m g$, $E_p = \frac{1}{2} k y^2$;

$$E_{p\,min} = \frac{1}{2} k \left(\frac{\mu m g}{k} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{(1{,}9 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \cdot 10)^2}{50} = 3{,}61 \cdot 10^{-4} \text{ J}.$$

63. *a*) $n = \frac{N}{V_m}$; $N = \frac{R}{k}$,

deci $n = \frac{R}{k V_m} = \frac{8{,}31}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-2}} = 4{,}3 \cdot 10^{25}$ molecule $\cdot$ m^{-3}.

b) În starea de volum minim, temperatura gazului descriind ciclul Carnot este maximă.

$$T_1 = \frac{p V_m}{R} = \frac{4{,}155 \cdot 10^5 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-2}}{8{,}31} = 700 \text{ K};$$

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{700 - 280}{700} = 0{,}6.$$

c) $Q_2 = Q_1 - L$, $Q_1 = \frac{L}{\eta}$;

$$Q_2 = L \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) = 1{,}2 \cdot 10^5 \left(\frac{1}{0{,}6} - 1 \right) = 80 \text{ kJ}.$$

64. *a*) $R = \rho \frac{l}{S} = 1{,}75 \cdot 10^{-8} \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^3}{\pi \cdot 9 \cdot 10^{-6}} = 6{,}2 \ \Omega$;

$U_c = U - RI = 25 \cdot 10^3 - 6{,}2 \cdot 80 = 24{,}5$ kV.

b) $P = RI^2 = 6{,}2 \cdot 80^2 = 39{,}68$ kW.

c) $W = Pt = Q = mc \cdot \Delta\theta$;

$$m = \frac{P \cdot t}{c \Delta\theta} = \frac{39{,}68 \cdot 10^3 \cdot 3\,600}{4\,180 \cdot 80} \cong 427 \text{ kg}.$$

65, 66. Se tratează conform manualului de liceu.

67. *a*) $F_t = G \sin \alpha$; $F_n = G \cos \alpha$.

$$a_c = \frac{F}{m} = \frac{F_t - F_{fr}}{m} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 10 \left(0{,}5 - 0{,}173 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) =$$

$= 3{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

b) $v = \sqrt{2 a_c d}$,

$$W_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m 2 a_c \frac{h}{\sin \alpha} = 10 \cdot 3{,}5 \cdot \frac{8}{0{,}5} = 560 \text{ J}.$$

c) $a = \frac{F_{fr}}{m} = \frac{\mu G}{m} = \mu g$;

$$t = \frac{v}{a} = \frac{v}{\mu g} = \frac{1}{\mu g} \sqrt{\frac{2 a_c h}{\sin \alpha}} = \frac{1}{0{,}173 \cdot 10} \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}5 \cdot 8}{0{,}5}} \cong 6{,}1 \text{ s}.$$

68. *a*) $pV = \frac{m}{M} RT$; $m = \frac{pV}{RT} M = \frac{8{,}31 \cdot 10^4 \cdot 600}{8\,310 \cdot 300} 2 = 40$ kg.

b) $m_1 = \frac{m}{n} = \frac{40}{160} = 0{,}25$ kg;

$$V_1 = \frac{m_1 R T_1}{M \cdot p_1} = \frac{0{,}25 \cdot 8\,310 \cdot 280}{2 \cdot 41{,}55 \cdot 10^5} = 7 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^3.$$

c) $\bar{E}_c = \frac{3}{2} kT$, $\frac{m'}{2}\bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT$;

$$\bar{v}^2 = \frac{3kT}{m'} = 3\frac{RT}{M} = \frac{3 \cdot 8\,310 \cdot 300}{2} \cong 3{,}74 \cdot 10^6\ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}.$$

69. *a)* $I_r = I + I_e = 40 + 2{,}5 = 42{,}5$ A;

$U = E - r \cdot I_r = 220 - 0{,}4 \cdot 42{,}5 = 203$ V.

b) $r_i = \frac{U}{I_e} = \frac{203}{2{,}5} = 81{,}2\ \Omega$.

c) $P_u = UI$; $\eta = \frac{UI}{P} = \frac{203 \cdot 40}{9\,500} \cong 0{,}855$.

70, 71. Se tratează conform manualului de liceu.

72. *a)* $\omega = 2\pi \frac{n}{60} = 2\pi \frac{300}{60} = 10\pi \cong 31{,}4\ \text{s}^{-1}$;

$v = \omega r = 31{,}4 \cdot 0{,}5 = 15{,}7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

b) $a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{15{,}7^2}{0{,}5} \cong 500\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

c) $t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{100 \cdot 2\pi}{10\pi} = 20$ s.

73. *a)* $L = 2p\,\Delta V - p\Delta V = p\,\Delta V = 2pV = 2 \cdot 1{,}13 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1 = 2{,}26 \cdot 10^4$ J.

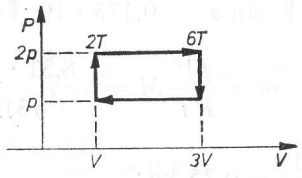


Fig. 5

b) $Q_1 = mc_V[T(2p, V) - T(p, V)] + mc_p[T(2p, 3V) - T(2p, V)] = \rho VT(c_V + 4c_p) = 1{,}3 \cdot 10^{-1} \cdot 300(720 + 4 \cdot 1\,000) = 184\,080$ J.

$Q_2 = mc_V[T(2p, 3V) - T(p, 3V)] + mc_p[T(p, 3V) - T(p, V)] = \rho VT(3c_V + 2c_p) = 1{,}3 \cdot 10^{-1} \cdot 300(3 \cdot 720 + 2 \cdot 1\,000) = 162\,240$ J.

c) $Q_1 - Q_2 = 21\,840$ J $= L$.

Deoarece $\Delta U|_{ciclu} = 0$, era normal ca $L = Q_1 - Q_2$. Între valoarea lui $L = 22\,600$ J obținută la punctul (*a*) și valoarea $Q_1 - Q_2 = 21\,840$ J obținută la punctul (*c*), există diferența de circa 3,5%, deoarece valorile introduse pentru ρ, C_p și C_V nu sînt riguros exacte.

74. *a)* $X_L = L\omega = \frac{10}{\pi} 10^{-3} 2\pi \cdot 50 = 1\ \Omega$.

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{\frac{2{,}5}{\pi} 10^3 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 50} = 4\ \Omega.$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{10}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2\ \text{A}.$$

$U_R = RI = 8$ V; $U_L = X_L I = 2$ V; $U_C = X_C I = 8$ V.

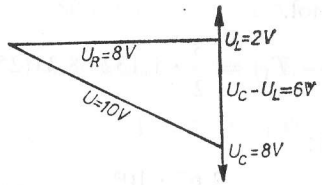


Fig. 6

b) $\text{tg}\,\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{1 - 4}{4} = -\frac{3}{4}$;

$\text{tg}\,\varphi_L = \frac{X_L}{R} = \frac{1}{4}$.

c) $P = UI \cos\varphi = 10 \cdot 2\frac{R}{Z} = 10 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5} = 16$ W;

$P_r = UI \sin \varphi = 10 \cdot 2 \cdot \frac{X_L - X_C}{Z} = 10 \cdot 2 \frac{-3}{5} = 12$ VAR;

$P_a = UI = 10 \cdot 2 = 20$ VA.

75, 76. Se tratează conform manualului de liceu.

77. *a)* $n_1 = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 300} = 0{,}401$ mol;

$n_2 = \frac{p_2 V_2}{RT_1} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 10^{-2}}{8{,}31 \cdot 300} = 1{,}203$ mol.

b) $n_1' = \frac{pV_1}{RT_1}$; $n_2' = \frac{pV_2}{RT_2}$.

$\frac{n_1'}{n_2'} = \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1}$.

$n_1' = \frac{n_1'}{n_1' + n_2'}(n_1 + n_2) = \frac{V_1 T_2}{V_1 T_2 + V_2 T_1}(n_1 + n_2) =$

$= \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 250}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 250 + 10^{-2} \cdot 300}(0{,}401 + 1{,}203) = 0{,}472$ mol.

$n_2' = \frac{V_2 T_1}{V_1 T_2 + V_2 T_1}(n_1 + n_2) = \frac{10^{-2} \cdot 300}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 250 + 10^{-2} \cdot 300}(0{,}401 +$

$+ 1{,}203) = 1{,}132$ mol.

c) $\Delta U = \frac{3}{2} n_2' R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2} \cdot 1{,}132 \cdot 8{,}31(250 - 300) = -705{,}5$ J.

78. *a)* $Q = m_0 c(T - T_0)$;

$T = T_0 + \frac{Q}{m_0 c} = 273 + \frac{2{,}67 \cdot 10^5}{0{,}3 \cdot 890} = 1\,273$ K.

b) $\rho = \frac{m}{V_0} = \frac{m}{m_0}\rho_0 = \frac{0{,}2806}{0{,}3}\,2\,700 = 2\,525{,}4$ kg $\cdot$ m^{-3}.

c) $\rho = \frac{\rho_0}{1 + \gamma \Delta T}$;

$\gamma = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho \Delta T} = \frac{2\,700 - 2\,525{,}4}{2\,525{,}4 \cdot 10^3} = 69 \cdot 10^{-6}$ K^{-1}.

79. *a)* $L = h\nu_0 = h\frac{c}{\lambda_0} = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{-7}} = 4{,}95 \cdot 10^{-19}$ J.

b) $E_c = h\frac{c}{\lambda} - L = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^{-7}} - 4{,}95 \cdot 10^{-19} =$

$= 1{,}65 \cdot 10^{-19}$ J.

c) $n = \frac{Pt}{h\nu} = \frac{Pt\lambda}{hc} = \frac{10^{-6} \cdot 33 \cdot 3 \cdot 10^{-7}}{6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 5 \cdot 10^{13}$ fotoni.

$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{3 \cdot 10^{-7}} = 2{,}2 \cdot 10^{-27}$ kg $\cdot$ m $\cdot$ s^{-1}.

80, 81. Se tratează conform manualului de liceu.

C

82. *a)* $h = \frac{at^2}{2}$; $a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 \cdot 12{,}5}{5^2} = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

b) $E_{p.\,max} = mgh = 500 \cdot 9{,}8 \cdot 12{,}5 = 6{,}125 \cdot 10^4$ J.

$L = Fh$;

$F = m(g + a) = 500(9{,}8 + 1) = 5{,}4 \cdot 10^3$ N.

$L = m(g + a)h = 500(9{,}8 + 1) \cdot 12{,}5 = 6{,}75 \cdot 10^4$ J.

83. *a)* $F_1 = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 500 \cdot 9{,}8\,(\sin 30° + 0{,}3 \cos 30°) =$

$= 4\,900\left(\frac{1}{2} + 0{,}3 \cdot \frac{1{,}73}{3}\right) = 3{,}72 \cdot 10^3$ N.

$L_1 = F_1 l = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 3{,}72 \cdot 10^3 \cdot 10 = 3{,}72 \cdot 10^4$ J.

$L_2 = mgh = mgl \sin \alpha = 500 \cdot 9{,}8 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}45 \cdot 10^4$ J.

b) $P = \frac{L_1}{t} = \frac{3{,}72 \cdot 10^4}{30} = 1{,}24 \cdot 10^3$ W.

84. $R_S = \rho\frac{l}{S} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\frac{10}{3{,}4 \cdot 10^{-6}} = 5 \cdot 10^{-2}\Omega$.

$I = I_A + I_S$; $R_S I_S = R_A I_A$.

$$I = I_A \frac{R_A + R_S}{R_S} = 0{,}5 \frac{1 + 5 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-2}} = 1{,}5 \text{ A}.$$

85, 86, 87. Se tratează conform manualului de liceu.

88.

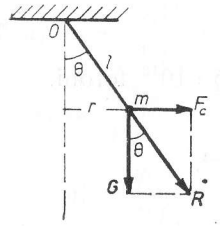


Fig. 7

$F_c = G \operatorname{tg} \theta;$

$F_c = m\omega^2 r = 4\pi^2 m\nu^2 r = 4\pi^2 m\nu^2 l \sin\theta.$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{F_c}{ml\sin\theta}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{G}{ml\cos\theta}},$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}} = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{10}{0{,}2 \cdot 0{,}5}} =$$

$= 1{,}59$ Hz.

89. *a)* $a = \dfrac{v^2}{2s} = \dfrac{1}{2 \cdot 200}\left(\dfrac{36 \cdot 10^3}{3\,600}\right)^2 = 0{,}25 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2},$

$$t = \frac{v}{a} = \frac{10}{0{,}25} = 40 \text{ s}.$$

b) $L = F_{fr}s = \mu Gs = \mu mgs = 0{,}04 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 200 = 24 \cdot 10^4 \text{J}.$

$P_{max} = F \cdot v_{max} = m(a + \mu g)\, v = 3 \cdot 10^3 (0{,}25 + 0{,}04 \cdot 10) \cdot 10 =$

$= 1{,}95 \cdot 10^4$ W.

Variantă

a) $s = \dfrac{vt}{2} \rightarrow t = \dfrac{2s}{v} = \dfrac{2 \cdot 200}{\dfrac{36 \cdot 10^3}{3\,600}} = 40$ s.

În acest caz, calculul accelerației va fi necesar la *b)* pentru determinarea puterii maxime dezvoltate de motor.

90. *a)* Varianta cînd elementele sursei de curent continuu sînt legate în serie:

$$U = Ir = \frac{nE}{nr + R} r.$$

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{40 \cdot 10}{40 + 10} = 8\ \Omega; \quad U = \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 0{,}25 + 8} 0{,}25 = 0{,}33 \text{ V}.$$

Variantă – Legare în paralel:

a) $U = Ir = \dfrac{E}{R + \dfrac{r}{n}} \cdot r,$

$$U = \frac{3}{8 + \dfrac{0{,}25}{4}} = \frac{3}{8{,}06} = 0{,}37 \text{ V}.$$

b) $m = kIt = kq, \quad q = N \cdot n \cdot e;$

$m = nkNe = 2 \cdot 3{,}3 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{22} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 1{,}05 \cdot 10^{-3}$ kg.

91, 92, 93. Se tratează conform manualului de liceu.

94. *a)* $v_0 = \dfrac{36 \cdot 10^3}{36 \cdot 10^2} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \quad v = \dfrac{72 \cdot 10^3}{36 \cdot 10^2} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$

$v = v_0 + a \cdot t; \quad a = \dfrac{v - v_0}{t}.$

$$a = \frac{20 - 10}{20} = 0{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

$F = m \cdot a; \quad F = 500 \cdot 0{,}5 = 250$ N.

b) $s = v_0 t + \dfrac{1}{2} \cdot at^2; \quad s = 10 \cdot 20 + \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 20^2 = 300$ m.

Variantă punctul b

$v_m = \dfrac{v + v_0}{2}; \quad v_m = \dfrac{10 + 20}{2} = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$

$s = v_m \cdot t = 15 \cdot 20 = 300$ m.

95. *a)* $x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi);$

$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 1 = 2\pi \text{ s}^{-1};$

$x = 5 \cdot 10^{-2} \sin(2\pi t)$ m.

b) $E = \dfrac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} (2\pi)^2 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 \text{ J} = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \text{J}.$

96. *a)* $E = I \cdot R_{tot}; \quad R_{tot} = R + r.$

$E = I_1(R_1 + r); \quad E = I_2(R_2 + r).$

$I_1(R_1 + r) = I_2(R_2 + r);$

$$r = \frac{R_2 I_2 - R_1 I_1}{I_1 - I_2} = \frac{20 \cdot 1{,}6 - 10 \cdot 3}{3 - 1{,}6} = 1{,}43\ \Omega.$$

b) $E = I_1(R_1 + r) = 3(10 + 1{,}43) = 34{,}29$ V.

97, 98. Se tratează conform manualului de liceu.

99. *a)* $v_0 = 72 \cdot \frac{1\,000}{3\,600} = 20\ \text{ms}^{-1}$;

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot 20^2 = 2 \cdot 10^5\ \text{J};$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2as} = \sqrt{20^2 - 2 \cdot 2 \cdot 25} = 17{,}32\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

b) $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{300}{100} = 3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}.$

$$a_t = \sqrt{a_n^2 + a^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \cong 3{,}6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

c) $F_t = ma_t = 1\,000\sqrt{13} \simeq 3\,600$ N.

$F_{fr} = \mu mg$; $\quad \mu mg > ma_n$.

$$\mu_{min} = \frac{a_n}{g} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

100. *a)* $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};\ \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

$$l = \frac{m}{k} g = \frac{1}{100} 10 = 0{,}1\ \text{m}.$$

b) $y = A \sin(\omega t + \varphi)$.

$$A = \frac{F}{k} = \frac{mg}{k} = \frac{1 \cdot 10}{100} = 0{,}1\ \text{m}.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10\ \text{s}^{-1}.$$

Pentru $t = 0$, $y = A$. Deci $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Rezultă: $y = 0{,}1 \cdot \cos 10t$.

c) $v = A\omega \cos(\omega t + \varphi) = -\sin 10t$,

$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -10 \cos 10t$.

101. *a)* $R_p = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{4 \cdot 6}{4 + 6} = 2{,}4\ \Omega$;

$R = R_1 + R_p = 6{,}6 + 2{,}4 = 9\ \Omega$;

$$I = \frac{nE_1}{nr_1 + R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{5 \cdot 4}{5 \cdot 0{,}2 + 6{,}6 + 2{,}4} = 2\ \text{A};$$

$E = I^2 R_1 t = 2^2 \cdot 6{,}6 \cdot 20 \cdot 3\,600 = 1{,}9 \cdot 10^6$ J.

b) $I_2 R_2 = I_3 R_3$, $I_2 + I_3 = I$;

$$I_3 = I \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 2 \cdot \frac{4}{4 + 6} = 0{,}8\ \text{A}.$$

$$n = \frac{I_3}{I_m} = \frac{0{,}8}{0{,}1} = 8.$$

$$R_{s_{max}} = \frac{r}{n - 1} = \frac{0{,}21}{8 - 1} = 0{,}03\ \Omega.$$

c) $H = N \frac{I_3}{l} = 50 \frac{0{,}8}{0{,}1} = 400 \frac{\text{A}}{\text{m}}$.

102, 103. Se tratează conform manualului din liceu.

104. *a)* $a_{max} = A\omega^2 = 2 \cdot 10^{-2} (20\pi)^2 = 79{,}1\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}.$

b) $v = A\omega \cos\left(20\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$,

deci

$$20\pi t_v + \frac{\pi}{4} = (2k + 1)\pi$$

și

$$t_v = \frac{8k+3}{80} \text{ s.} \qquad (k = \text{întreg})$$

$$a = -A\omega^2 \sin\left(20\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

deci

$$20\pi t_a + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

și

$$t_a = \frac{4k+1}{80} \text{ s.} \qquad (k = \text{întreg})$$

c) $W_t = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{25 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{2} \cdot (20\pi)^2 =$

$= 2\pi^2 \cdot 10^{-3} \cong 19{,}78 \cdot 10^{-3}$ J.

105. a) $qvB = \frac{mv^2}{r} \to m = \frac{qrB}{v} = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}665}{1{,}6 \cdot 10^6} =$

$= 6{,}65 \cdot 10^{-27}$ kg.

b) $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{1{,}6 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 0{,}05} = 5{,}09$ MHz.

c) $U = \frac{mv^2}{2q} = \frac{6{,}65 \cdot 10^{-27} \cdot 2{,}56 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-19}} = 26{,}6$ kV.

106. a) $R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = \frac{4 \cdot 6}{4+6} + 1{,}6 = 4\ \Omega.$

$R' = R_1 + R_3 = 5{,}6\ \Omega.$

b) $E = (R + r)\, I = (4 + r) \cdot 2 = (5{,}6 + r) \cdot 1{,}5,$

de unde $8 + 2r = 5{,}6 \cdot 1{,}5 + 1{,}5r;$

$r = \frac{8{,}4 - 8}{0{,}5} = 0{,}8\ \Omega;\ E = 2 \cdot 4{,}8 = 9{,}6$ V.

c) $P = E \cdot I = 9{,}6 \cdot 2 = 19{,}2$ W;

$P' = E \cdot I' = 9{,}6 \cdot 1{,}5 = 14{,}4$ W.

107, 108. Se tratează conform manualului de liceu.

109. a) $\frac{gt^2}{2} + v_0(t - \Delta t) - \frac{1}{2}g(t - \Delta t)^2 = h;$

$$t = \frac{h + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 + v_0 \cdot \Delta t}{v_0 + g \cdot \Delta t} = \frac{520 + \frac{1}{2}10 \cdot 2^2 + 80 \cdot 2}{80 + 10 \cdot 2} = 7 \text{ s.}$$

b) $v_r = gt + v_0 - g(t - \Delta t) = 10 \cdot 7 + [80 - 10(7 - 2)] = 100\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$

c) $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{80^2}{2 \cdot 10} = 320$ m.

110. a) $I = \frac{2E}{R + 2r},\quad i = \frac{E}{R + r};$

$$2r = \frac{2E}{I} - R = 2\left(\frac{E}{i} - R\right),$$

$$\frac{1}{I} = \frac{1}{i} - \frac{R}{2E} = \frac{1}{0{,}5} - \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4},$$

deci

$I = \frac{4}{5} = 0{,}8$ A.

b) $E = (R + r)i,$

$r = \frac{E}{i} - R = \frac{2}{0{,}5} - 3 = 1\ \Omega.$

c) $I' = \frac{E}{\frac{r}{2} + R} = \frac{2}{\frac{1}{2} + 3} = 0{,}57$ A.

Variantă. Candidatul putea afla direct rezistența internă și ulterior, intensitatea curentului.

111. *a)* $I = \dfrac{U_b}{R_1} = \dfrac{50}{20} = 2{,}5$ A.

b) $Z_L = \dfrac{U_L}{I} = \dfrac{70}{2{,}5} = 28\ \Omega.$

$Z = \dfrac{U}{I} = \dfrac{100}{2{,}5} = 40\ \Omega.$

$Z^2 = (R_1 + R)^2 + X_L^2,$

$Z_L^2 = R^2 + X_L^2, \quad Z^2 - Z_L^2 = 2R_1R + R_1^2.$

$R = \dfrac{Z^2 - R_1^2 - Z_L^2}{2R_1} = \dfrac{40^2 - 20^2 - 28^2}{2 \cdot 20} = 10{,}4\ \Omega.$

c) $X_L = \sqrt{Z_L^2 - R^2} = \sqrt{28^2 - 10{,}4^2} = 26\ \Omega.$

$L = \dfrac{X_L}{\omega} = \dfrac{X_L}{2\pi\nu} = \dfrac{26}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50} \simeq 0{,}082$ H.

112, 113. Se tratează conform manualului de liceu.

D

114. *a)* $h = \dfrac{1}{2} gt^2; \quad t = \sqrt{2\dfrac{h}{g}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 19{,}6}{9{,}8}} = 2$ s.

b) $v = \sqrt{2gh}, \quad E_c = \dfrac{1}{2} mv^2 = mgh;$

$E_c = 2 \cdot 9{,}8 \cdot 19{,}6 = 384{,}16$ J.

115. *a)* $v = \sqrt{v_0^2 - 2ad} = 0.$

$v_0^2 = 2ad; \ v = v_0 - at = 0; \ a = \dfrac{v_0}{t}.$

$v_0^2 = 2\dfrac{v_0}{t} d \to v_0 = \dfrac{2d}{t} = \dfrac{2 \cdot 10}{2{,}5} = 8\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}.$

b) $F = -ma = -\dfrac{mv_0}{t} = -\dfrac{2 \cdot 10^3 \cdot 8}{2{,}5} = -6{,}4 \cdot 10^3$ N.

116. *a)* $E_1 = \dfrac{q}{\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \left(\dfrac{d}{2}\right)^2} = \dfrac{2 \cdot 10^{-7}}{3{,}14 \cdot 8{,}84 \cdot 10^{-12} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-2}} = 3{,}28 \cdot 10^7\ \dfrac{\text{V}}{\text{m}}.$

$E_2 = \dfrac{q_2}{\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 d} = 6{,}56 \cdot 10^7\ \dfrac{\text{V}}{\text{m}}.$

b) $E = E_1 + E_2; \quad E = 9{,}84 \cdot 10^7\ \dfrac{\text{V}}{\text{m}}.$

117, 118, 119. Se tratează conform manualului de liceu.

120. *a)* $G_t = G \sin\alpha = mg \sin\alpha, \ G_a = G \cos\alpha = mg \cos\alpha;$

$a_u = g(\sin\alpha + \mu \cos\alpha),$

$s = \dfrac{v_0^2}{2a_u} = \dfrac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = 136{,}7$ m.

b) $t_u = \dfrac{v_0}{a_u} = \dfrac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = \dfrac{40}{10(\sin 30° + 0{,}1 \cos 30°)} = 6{,}8$ s.

121. *a)* $y = A \sin(\omega t + \varphi).$

$F_{max} = kA; \ k = \dfrac{10}{0{,}2} = 50\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}}.$

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{50}{0{,}5}} = 10\ \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}.$

$y = 0{,}2 \sin(10t + \varphi)$ m.

$t = 0 \to y = 0{,}2$ m $\to \sin\varphi = 1 \to \varphi = \dfrac{\pi}{2}.$

$y = 0{,}2 \sin\left(10t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ m.

b) $E = \dfrac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \dfrac{1}{2} 0{,}5 \cdot 10^2 \cdot 0{,}2^2 = 1$ J.

122. *a)* $R = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = \dfrac{800}{60} = 13{,}3\ \Omega.$

$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{42}{13{,}3 + 0{,}7} = 3 \text{ A}.$$

b) $I_1 + I_2 = I$; $I_1 R_1 = I_2 R_2$.

$I_1 + I_2 = 3$, $40\, I_1 = 20\, I_2$;

$I_1 = 1$ A; $I_2 = 2$ A.

123, 124, 125. Se tratează conform manualului din liceu.

126. $a_c = g(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha)$;

$v^2 = 2a_c l_1$, $a = \mu_2 g$;

$2\mu_2 g l_2 = 2g(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) l_1$;

$$\mu_2 = (\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha)\frac{1}{2} = (\sin 30° - 0{,}2 \cos 30°)\frac{l_1}{3l_1} = 0{,}109.$$

127. *a)* $$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{8 \cdot 40}{8 + 40} = 6{,}67\ \Omega.$$

b) $$I = \frac{E}{r} = \frac{40}{\frac{40}{6}} = 6 \text{ A}; \quad I_1 = \frac{E}{R_1} = \frac{40}{8} = 5 \text{ A};$$

$$I_2 = \frac{E}{R_2} = \frac{40}{40} = 1 \text{ A}.$$

128. $$\cos \varphi = \cos \frac{\pi}{3} = 0{,}5.$$

$P = UI \cos \varphi = 220 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 220$ W;

$$P_r = UI \sin \varphi = 220 \cdot 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 380{,}6 \text{ VAR};$$

$P_a = UI = 220 \cdot 2 = 440$ VA.

129, 130, 131. Se tratează conform manualului din liceu.

132. *a)* $m_1 v_0 = (m_1 + m_2)v$;

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{0{,}05}{0{,}2 + 0{,}05} 10 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

b) $$F_c = (m_1 + m_2)\frac{v^2}{l} = (0{,}05 + 0{,}2)\frac{2^2}{0{,}8} = 1{,}25 \text{ N}.$$

$T = G + F_c = (m_1 + m_2)g + F_c = (0{,}05 + 0{,}2)10 + 1{,}25 = 3{,}75$ N.

133. *a)* $$X_L = \omega L \to \omega = \frac{X_L}{L} = \frac{12}{2 \cdot 10^{-3}} = 6 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$X_L = X_C \to \frac{1}{\omega C} = 12 \to C = \frac{1}{12 \cdot 6 \cdot 10^3} = 14 \ \mu\text{F}.$$

b) $$I_{ef} = \frac{U_{ef}}{Z};$$

$Z = [R^2 + (X_L - X_C)^2]^{1/2} = R = 50\ \Omega$.

$$I_{ef} = \frac{220}{50} = 4{,}4 \text{ A}.$$

$P = RI^2 = 50 \cdot (4{,}4)^2 = 968$ W.

134. *a)* $R' = 2R$; $R + R' = 75 \to 3R = 75 \to R = 25\ \Omega$;

$R' = 50\ \Omega$.

$$R_e = \frac{R}{2} + R' = \frac{25}{2} + 50 = 62{,}5\ \Omega.$$

b) $U = R_e I_t$;

$U = R_e \cdot 2I = 62{,}5 \cdot 2 \cdot 0{,}7 = 87{,}5$ V.

$Q = UI_t t = 87{,}5 \cdot 1{,}4 \cdot 50 = 6{,}125$ kJ.

135, 136, 137. Se tratează conform manualului din liceu.

138. *a)* $y_1 = A \cdot \sin \omega t_1$;

$v_1 = A\omega \cdot \cos \omega t_1$, de unde $A = \sqrt{y_1^2 + \left(\frac{v_1}{\omega}\right)^2}$.

$$v_1 = \frac{H_1}{m} = \frac{0{,}3}{0{,}1} = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10^3}{0,1}} = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

$A = \sqrt{9 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-4}} = 4,24 \cdot 10^{-2}$ m.

$y = 0,0424 \cdot \sin 100\ t$.

b) $H_{max} = m \cdot v_{max} = m \cdot A \cdot \omega \cong 0,1 \cdot 100 \cdot 0,0424 =$

$= 0,424 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

c) $E_p = \frac{k}{2} \cdot y_2^2$;

$E_p = \frac{10^3 \cdot 16 \cdot 10^{-4}}{2} = 0,8$ J.

$E_c = E_t - E_p = \frac{k}{2} \cdot A^2 - E_p$; $E_c = \frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10^{-4} - 0,8 =$

$= 0,1$ J.

139. *a*) $Z = \frac{U}{I} = \frac{220}{2,2} = 100\ \Omega$.

$R_1 + R_2 = Z \cdot \cos \frac{\pi}{6}$,

de unde $R_1 = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 20 \cong 66,6\ \Omega$.

$X_C = X_L - Z \cdot \sin \frac{\pi}{6} = R_1 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - Z \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 115 - 100 \cdot \frac{1}{2} =$

$= 65\ \Omega$.

b) $L = \frac{1}{\omega} \cdot X_L$; $L = \frac{115}{100\pi} \cong 0,366$ H.

$C = \frac{1}{X_C \omega} = \frac{1}{65 \cdot 100\ \pi} = 0,49\ \mu\text{F}$.

c) $P = U \cdot I \cdot \cos \varphi_c = 220 \cdot 2,2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 119,1$ W;

$P_n = U \cdot I \cdot \sin \varphi_c = 220 \cdot 2,2 \cdot \frac{1}{2} = 242$ VAR;

$P_a = U \cdot I = 220 \cdot 2,2 = 484$ VA.

140. *a*) $R_1 = \frac{U_1^2}{P_1} = \frac{120^2}{60} = 240\ \Omega$.

$U_2 = U - U_1 = I \cdot R_2$;

$R_2 = \frac{U - U_1}{I} = \frac{U_1(U - U_1)}{P} = \frac{120(220 - 120)}{60} = 200\ \Omega$.

b) $R_1 = R_0(1 + \alpha\theta)$;

$\theta = \frac{1}{\alpha R_0}(R_1 - R_0)$, $\theta = \frac{1}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 20}(240 - 20) = 2\,200°\text{C}$.

c) $W = I^2 R_2 t = \left(\frac{P}{U}\right)^2 \cdot R_2 t$; $W = \left(\frac{60}{120}\right)^2 \cdot 200 \cdot 300 = 15$ kJ.

$q = I \cdot t$; $q = 0,5 \cdot 2 = 1$ C.

141, 142. Se tratează conform manualului de liceu.

143. *a*) $f = \frac{\omega}{2\pi}$, $\omega = 120\ \pi\ \text{s}^{-1}$;

$f = \frac{120\ \pi}{2\pi} = 60$ Hz.

b) $v_{max} = A \cdot \omega$.

$A = 2 \cdot 10^{-3}$ m; $v_{max} = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 120 = 0,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

c) $\frac{2\pi}{\lambda} = 0,25$, deci $\lambda = \frac{2\pi}{0,25} = 25,12$ m.

$v = \lambda \cdot f$, $v = 25,12 \cdot 60 = 1\,507,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

144. *a*) $U_{max} = n \cdot r \cdot i$;

$U_{max} = 50 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 50 \cdot 10^{-3}$ V.

$b)\ N = \dfrac{0{,}1}{0{,}5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 100,$

deci trebuie să i se înserieze șuntul $R_s = (N - 1)r$.

$R_s = 99 \cdot 0{,}5 = 49{,}5\ \Omega.$

$c)\ N' = \dfrac{1}{50 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 10,$

deci trebuie să i se lege în paralel șuntul $R_p = \dfrac{r}{n-1}$.

$R_p = \dfrac{0{,}5}{10 - 1} = 55{,}5\ \text{m}\Omega.$

145. $a)\ B = \dfrac{\Phi}{S} = \dfrac{4{,}5 \cdot 10^{-3}}{18 \cdot 10^{-4}} = 2{,}5\ \text{T}.$

$e = B \cdot l \cdot v; \quad e = 2{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}45\ \text{V}.$

$b)\ a = \dfrac{F - B \cdot l\, I}{m}, \quad a = \dfrac{1}{m}\left(F - B \cdot l \cdot \dfrac{e}{R}\right);$

$a = \dfrac{1}{0{,}15}\left(0{,}5 - 2{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot \dfrac{0{,}45}{0{,}9}\right) = 0{,}83\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}.$

$c)\ \dfrac{Blv_{max}}{R} = I_{max}, \quad \dfrac{Blv_{max}}{R} \cdot B = F;$ deci $v_{max} = \dfrac{F \cdot R}{B^2 l^2}.$

$v_{max} = \dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}9}{2{,}5^2 \cdot 0{,}3^2} = 0{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$

146, 147. Se tratează conform manualului de liceu.

148. $a)\ \mu = \dfrac{F_{fr}}{G}.$

$F_{fr} = \dfrac{P}{v},$ deci $\mu = \dfrac{P}{m \cdot g \cdot v}.$

$\mu = \dfrac{40 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot \dfrac{57{,}6}{3{,}6}} = 0{,}05.$

$b)\ t = \dfrac{v}{a_{fr}} = \dfrac{v}{\mu g} = \dfrac{1}{0{,}05 \cdot 10} \cdot \dfrac{57{,}6}{3{,}6} = \dfrac{16}{0{,}5} = 32\ \text{s}.$

$d = \dfrac{v^2}{2\mu g} = \dfrac{16^2}{2 \cdot 0{,}05 \cdot 10} = 256\ \text{m}.$

$c)\ a_u = g(\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha);$

$v_{ilim} = \dfrac{P_m}{m \cdot a_u} = \dfrac{125 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^3 \cdot 10(0{,}5 + 0{,}05 \cdot 0{,}866)} = 4{,}6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$

149. $a)\ F = B \cdot l \cdot I = 1{,}2 \cdot 0{,}15 \cdot 2 = 0{,}36\ \text{N}.$

$b)\ G = \dfrac{F}{\sin\theta}; \quad G = \dfrac{0{,}36}{0{,}5} = 0{,}72\ \text{N}.$

$M = \dfrac{G}{g}; \quad m = \dfrac{0{,}72}{10} = 72\ \text{g}.$

$c)\ v = \sqrt{2g \cdot h},$

$v = \sqrt{2g \cdot AB(1 - \cos\theta)},$

$v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}4\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 1{,}035\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$

150. $a)\ \dfrac{N_1 I}{l_1} = \dfrac{N_2 I}{l_2}; \quad \dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8.$

$b)\ \mu_1 \dfrac{N_1^2 \cdot A_1}{l_1} = \mu_2 \cdot \dfrac{N_2^2 \cdot A_2}{l_2},$

$\mu_1\left(\dfrac{N_1}{l_1}\right)^2 \cdot A_1 l_1 = \mu_2\left(\dfrac{N_2}{l_2}\right)^2 \cdot A_2 l_2; \ V_1 = A_1 l_1; \ V_2 = A_2 l_2$

și

$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\mu_2}{\mu_1}; \quad \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{16}{40} = 0{,}4 \cdot$

$c)\ r = \dfrac{E}{I} - R_1 - R_2,$

$$r = \frac{6}{0{,}5} - 4{,}5 - 7 = 0{,}5\ \Omega.$$

151, 152. Se tratează conform manualului de iceu.

E

153, 154, 155, 156. Se tratează conform manualului de liceu.

157. *a)* $T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = \frac{10^5 \cdot 99{,}7 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8{,}31} \cong 600$ K.

$t_1 = T_1 - 273 = 600 - 273 \cong 327°C.$

b) $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{600 - 300}{600} = 0{,}5.$

c) $L = Q_1 = \eta_1 \cdot mq = 0{,}2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 4{,}6 \cdot 10^7 = 1{,}38 \cdot 10^4$ J.

158. *a)* $\nu = \frac{c}{\lambda} = R_\upsilon\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right); \quad R_\upsilon = \frac{c}{\lambda_{max}} \cdot \frac{2^2 \cdot 3^2}{3^2 - 2^2} = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ Hz.

b) $\sin \alpha = \frac{n\lambda}{d} = \frac{8 \cdot 0{,}6563 \cdot 10^{-6}}{10{,}5 \cdot 10^{-6}} = 0{,}5 \rightarrow \alpha = 30°.$

c) $i = n\frac{f\lambda}{d} = 1 \cdot \frac{0{,}24 \cdot 0{,}6563 \cdot 10^{-6}}{10{,}5 \cdot 10^{-6}} \cong 0{,}015$ m.

159, 160, 161. Se tratează conform manualului de liceu.

162. *a)* $m_1(c_1 t_f + \lambda_1) = mc(t - t_f);$

$$c = \frac{m_1(c_1 t_f + \lambda_1)}{m(t - t_f)} = \frac{0{,}1(4\,180 \cdot 10 + 334\,400)}{1{,}1(100 - 10)} = 380\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

b) $V_f = l_0^3(1 + 3\alpha \cdot \Delta t) = (5, 2)^3\,(1 + 3 \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 10) = 135{,}5\ \text{cm}^3;$

$$\rho_f = \frac{m}{V_f} = \frac{1{,}1}{135{,}5 \cdot 10^{-6}} = 8\,120\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

c) $F = ES\alpha \cdot \Delta t = 9{,}8 \cdot 10^{10} \cdot 5{,}2^2 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 90 = 4{,}59 \cdot 10^4$N.

163. *a)* $\nu = \frac{c}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right); \quad (k = 2)$

$$\lambda_{max} = \frac{c}{R}\,\frac{3^2 \cdot 2^2}{3^2 - 2^2} = \frac{3 \cdot 10^8}{3{,}29 \cdot 10^{15}}\,\frac{36}{5} = 656{,}5\ \text{nm}. \quad (n = 3)$$

b) $E_n = -\frac{1}{n^2}\,\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2} = -\frac{Rh}{n^2};$

$$E_2 = -\frac{Rh}{4} = -\frac{3{,}29 \cdot 10^{15} \cdot 6{,}6 \cdot 10^{-34}}{4} = -3{,}395\ \text{eV}.$$

$$E_3 = -\frac{Rh}{9} = -2{,}41\ \text{eV}.$$

c) $d = \frac{n\lambda}{\sin \alpha} = \frac{2 \cdot 0{,}6565 \cdot 10^{-6}}{0{,}101} = 13\ \mu\text{m}.$

164, 165, 166. Se tratează conform manualului de liceu.

CHIMIE

Redactor: ANA GHEORGHIU

Cuprins

I. **ENUNȚURI** 157

A. CHIMIE ANORGANICĂ ȘI ORGANICĂ 157
(Inginerie chimică, Chimie, Biochimie — iulie 1978)
B. CHIMIE ANORGANICĂ ȘI ORGANICĂ 158
(Mecano-chimie — septembrie 1978)
C. CHIMIE ANORGANICĂ ȘI ORGANICĂ 158
(Subingineri-chimie — iulie 1978)
D. CHIMIE ANORGANICĂ ȘI ORGANICĂ 159
(Subingineri-chimie — septembrie 1978)
E. CHIMIE ORGANICĂ 159
(Medicină, Biologie — iulie 1978)
F. CHIMIE ORGANICĂ 159
(Stomatologie, Farmacie — iulie 1978)
G. CHIMIE ORGANICĂ 160
(Subingineri — iulie 1978)
H. CHIMIE ANORGANICĂ 160
(Farmacie — iulie 1978)
I. CHIMIE ANORGANICĂ ȘI ORGANICĂ 161
(Inginerie chimică, Chimie, Biochimie — iulie 1979)
J. CHIMIE ANORGANICĂ ȘI ORGANICĂ 161
(Mecano-chimie — iulie 1979)
K. CHIMIE ANORGANICĂ ȘI ORGANICĂ 162
(Industrie alimentară, Piscicultură — iulie 1979)
L. CHIMIE ANORGANICĂ ȘI ORGANICĂ 162
(Subingineri-chimie — iulie 1979)
M. CHIMIE ORGANICĂ 163
(Medicină, Biologie — iulie 1979)
N. CHIMIE ORGANICĂ 163
(Stomatologie, Farmacie — iulie 1979)
O. CHIMIE ORGANICĂ 164
(Subingineri-Industrie alimentară — iulie 1979)
P. CHIMIE ANORGANICĂ 164
(Farmacie — iulie 1979)

II. **REZOLVĂRI** (INDICAȚII, RĂSPUNSURI) 165

I. ENUNȚURI

A. CHIMIE ANORGANICĂ ȘI ORGANICĂ
(Inginerie chimică, Chimie, Biochimie — iulie 1978)

1. Prepararea și proprietățile chimice ale hidrogenului sulfurat.

2. Ce produși rezultă la tratarea glicocolului, respectiv alaninei, cu acid azotos? Să se scrie ecuațiile reacțiilor.

3. Să se arate cum se poate prepara compusul $C_6H_5—CHOH—COOH$ pornind de la toluen?

4. La tratarea unei alame (Zn + Cu) cu NaOH se degajă 11,2 l H_2. Partea nedizolvată după filtrare se dizolvă total în 40 g soluție H_2SO_4 49% în prezență de aer (oxigen).
Se cere:
a) scrierea reacțiilor chimice;
b) compoziția procentuală a aliajului;
c) cantitatea de $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ care rezultă.

5. Un amestec de propan (20% vol) și butan (80% vol) arde conducînd la bioxid de carbon și apă. Să se calculeze:
a) volumul de aer necesar arderii complete a 1 m^3 amestec (condiții normale);
b) volumul de aer (condiții normale) necesar arderii complete a 1 kg amestec de hidrocarburi;
c) compoziția în % volumetrice a gazelor de ardere (bioxid de carbon și vapori de apă).
Aerul conține 21% (vol) oxigen.

---

* În rezolvările date, pentru subiectele ce urmează, au fost utilizate numai acele reacții chimice care se găsesc în manual.

B. CHIMIE ANORGANICĂ ȘI ORGANICĂ
(Mecano-chimie — septembrie 1978)

6. Proprietățile chimice ale metalelor din grupa a II-a principală (alcalino-pămîntoase).

7. Indicați metoda de obținere a acidului azotic și a sărurilor de amoniu pornind de la amoniac.

8. Metode de obținere ale alcoolilor.

9. Să se indice izomerii care corespund alchenei cu masa moleculară 56 și să se specifice denumirile lor, tipurile de izomerie și reacțiile pe care le dau izomerii cu acidul clorhidric.

10. 10 cm^3 dintr-o soluție care conține un amestec de acid clorhidric și acid sulfuric se neutralizează cu 8 cm^3 soluție de hidroxid de sodiu de concentrație 1 mol/l. Prin neutralizare se formează săruri neutre. După evaporarea soluției obținute în urma neutralizării rezultă 0,5 g amestec de săruri. Să se calculeze compoziția inițială a amestecului de acizi exprimată în moli/l.

C. CHIMIE ANORGANICĂ ȘI ORGANICĂ
(Subingineri-chimie — iulie 1978)

11. Dintre substanțele chimice de mai jos să se arate care sînt electroliți slabi în soluții apoase:

CH_3COONa, H_2S, CH_3COOH, NH_3, KI, H_3PO_4, HF.

12. Metoda industrială de obținere a aluminiului.

13. Metode de preparare ale acizilor monocarboxilici și dicarboxilici.

14. Se supun fermentației alcoolice 360 kg glucoză pură, se cere:

a) scrierea reacției chimice;

b) cantitatea de etanol 80% (procente gravimetrice) care s-ar putea obține, dacă randamentul de transformare este 80%.

D. CHIMIE ANORGANICĂ ȘI ORGANICĂ
(Subingineri-chimie — septembrie 1978)

15. Proprietățile chimice ale oxidului de carbon.

16. Să se scrie:

a) ecuațiile reacțiilor acidului sulfuric cu aluminiu și cupru;

b) formulele de structură, denumirile izomerilor care corespund formulei moleculare C_5H_{12}, precum și tipul de izomerie.

17. Metode de obținere ale aldehidelor și cetonelor.

18. Din arderea completă a unui amestec de carbon și sulf rezultă 440 g bioxid de carbon și 224 l bioxid de sulf, măsurat în condiții normale. Se cere:

a) compoziția în procente — greutate a amestecului supus arderii;

b) volumul de aer măsurat în condiții normale (cu 20%—vol. O_2), ce se consumă la ardere.

E. CHIMIE ORGANICĂ
(Medicină, Biologie — iulie 1978)

19. Proprietățile chimice ale acetilenei. Reacții de adiție și compuși metalici.

20. Pornind de la alcool etilic, formaldehidă și folosind reactanții anorganici necesari, să se indice metoda de preparare a alcoolului *n*-propilic.

21. Scrieți formulele de structură și denumirile acizilor dicarboxilici care corespund formulei moleculare $C_4H_4O_4$ și indicați:

— tipul de izomerie pe care îl prezintă;

— ce se obține prin hidrogenarea acestor acizi (reacția);

— indicați care dintre acizii formulați pot forma anhidride (reacția).

F. CHIMIE ORGANICĂ
(Stomatologie, Farmacie — iulie 1978)

22. Halogenarea benzenului și toluenului.

23. Proprietățile chimice comune ale aldehidelor și cetonelor.

24. Hidrogenarea catalitică a compușilor organici — exemple și importanță.

G. CHIMIE ORGANICĂ
(Subingineri — iulie 1978)

25. Esteri ai acizilor organici și anorganici — metode de obținere. Factorii care influențează reacția de esterificare.

26. Indicați cîte o metodă pentru obținerea:
— acrilonitrilului;
— acidului salicilic;
— acidului adipic.

27. Să se indice formulele de structură și denumirea compușilor aromatici izomeri care corespund formulei moleculare C_8H_{10}.

28. Un volum de 11,2 m^3 propenă măsurat în condiții normale, se tratează cu benzen în prezență de acid fosforic, obținîndu-se o hidrocarbură A. Se cere:

a) să se arate cum se poate obține din A fenol și să se formuleze toate reacțiile care au loc;

b) ce cantitate de fenol va rezulta din cantitatea de propenă menționată, dacă randamentele sînt cantitative;

c) pe lîngă fenol, în reacție rezultă și un al doilea produs tehnic important. În ce cantitate se va forma acesta, dacă randamentul după izolarea sa este de 80%?

H. CHIMIE ANORGANICĂ
(Farmacie — iulie 1978)

29. Sulfiți. Sulfați. Obținere. Structura anionilor SO_3^{2-} și SO_4^{2-}. Prezentare comparativă a proprietăților chimice.

30. Prezentare comparativă a proprietăților elementelor grupei a II-a A.

31. Să se scrie ecuația reacției de obținere a $AgNO_3$ din Ag metalic, stabilind coeficienții chimici. Să se indice reacțiile care au loc la electroliza unei soluții apoase de $AgNO_3$, folosind un anod de argint, precum și natura transformărilor chimice care au loc la electrozi. Care este importanța practică a acestui proces?.

32. Hibridizarea atomului de carbon

I. CHIMIE ANORGANICĂ ȘI ORGANICĂ
(Inginerie chimică, Chimie, Biochimie — iulie 1979)

33. Ionizarea apei. Hidroliza sărurilor.

34. Să se determine compoziția (% masă) unui amestec format din fier, aluminiu și cupru, dacă prin acțiunea unei soluții de hidroxid de sodiu asupra a 13 g din acest amestec se degajează 6,72 l de gaz, iar prin acțiunea unei soluții de acid clorhidric asupra aceleiași cantități de amestec, 8,96 l de gaz.

Notă: Calculul se efectuează pentru condiții normale; cuprul nu reacționează cu hidroxidul de sodiu și cu acidul clorhidric.

35. Proprietăți ale compușilor hidroxilici organici.

36. Se dau 214 g amestec format din două hidrocarburi: A — o alchenă și B — un alcan. La hidrogenarea amestecului, A se transformă în B, iar masa amestecului crește cu 6 g. La arderea produsului obținut în urma hidrogenării se formează 336 l bioxid de carbon (condiții normale). Să se indice formulele hidrocarburilor din amestecul inițial și concentrația lor procentuală în amestec.

37. Să se indice ecuațiile reacțiilor chimice prin care se pot obține următorii compuși:
a) sulfatul acid și sulfatul neutru de sodiu;
b) clorura de calciu pornind de la clorura de amoniu;
c) acidul acetic;
d) antrachinona.

J. CHIMIE ANORGANICĂ ȘI ORGANICĂ
(Mecano-chimie — iulie 1979)

38. Diamantul, Oxidul de carbon

39. La amestecarea unei soluții de azotat de argint cu o cantitate (masă) egală dintr-o soluție de clorură de sodiu, substanțele reacționează în întregime. Se cere:

a) concentrația procentuală a soluției de clorură de sodiu, dacă soluția de azotat de argint avea concentrația 3,4%;

b) concentrația procentuală a soluției de azotat de sodiu rezultată.

40. Amide.

41. O cantitate de 2,8 g dintr-o alchenă reacționează cu bromul conținut în 100 cm^3 soluție de concentrație 0,5 moli/l. Să se indice formulele de structură ale izomerilor alchenei și denumirile lor.

K. CHIMIE ANORGANICĂ ȘI ORGANICĂ
(Industrie alimentară, Piscicultură — iulie 1979)

42. Hidrogenul sulfurat.

43. Se supun electrolizei 1 000 kg soluție de clorură de sodiu, puritatea sării fiind de 93,6%, iar concentrația soluției de sare pură este 58,5%. Electroliza se întrerupe cînd concentrația soluției de sare pură ajunge la 11,7%. Se cere:
a) cantitatea de hidroxid de sodiu rezultată;
b) volumul gazelor ce se formează la electrozi, măsurate în condiții normale.

44. Metode de preparare ale acizilor carboxilici.

45. O alchenă gazoasă formează prin oxidare energică exclusiv acid acetic. Se cere:
a) formulele de structură și denumirile izomerilor alchenei supuse oxidării;
b) volumul alchenei (la 0°C și 1 atm) știind că în urma oxidării ei se obțin 120 kg acid acetic.
Se admite că reacția de oxidare decurge cantitativ.

L. CHIMIE ANORGANICĂ ȘI ORGANICĂ
(Subingineri-chimie — iulie 1979)

46. Obținerea și proprietățile fizice și chimice ale hidracizilor halogenilor.

47. Se oxidează cantitativ 3 kmoli de amoniac conducînd în final la acid azotic, conform reacției globale:
$NH_3 + 2O_2 \rightarrow HNO_3 + H_2O$. Se cere:
a) cantitatea de acid azotic (considerat 100%) ce se obține;
b) cantitatea de soluție 85% care rezultă prin dizolvarea acidului azotic în apă.

48. Metode de preparare ale aldehidelor și cetonelor.

49. Ce compuși se obțin prin oxidarea următoarelor hidrocarburi:
a) 2-metil-2-butenă;
b) toluen;
c) naftalină;
d) antracen?
Să se scrie ecuațiile reacțiilor chimice și să se indice denumirile produșilor obținuți.

M. CHIMIE ORGANICĂ
(Medicină, Biologie — iulie 1979)

50. Reacția Friedel-Crafts.

51. Reacții ale compușilor organici care decurg cu eliminare de apă.

52. Utilizînd ca materie primă propena, precum și alți reactivi necesari, să se indice două metode pe baza cărora se poate obține în final acetonă. Să se indice ecuațiile reacțiilor chimice.

53. Ce conținut de azot (în procente de masă) are o tripeptidă formată din trei resturi de glicocol?

N. CHIMIE ORGANICĂ
(Stomatologie, Farmacie — iulie 1979)

54. Metode de obținere și proprietățile chimice ale cetonelor.

55. Oxidarea alcanilor, alchenelor și alchilbenzenilor.

56. Să se indice cîte o cale de transformare a materiilor prime indicate mai jos (în stînga) în produșii specificați în dreapta, precizînd și ceilalți reactivi necesari:
a) propionitril ..... acid propionic
b) acetilenă ..... acetaldehidă
c) benzen ..... dimetilanilină
d) benzen ..... benzaldehidă

57. Care este formula brută și formula moleculară a unei substanțe organice care conține 85,71% C și 14,29% H știind că masa ei moleculară este 84?

O. CHIMIE ORGANICĂ
(Subingineri — Industrie alimentară — iulie 1979)

58. Proprietăți chimice ale fenolilor.

59. Sinteze și proprietăți ale aminoacizilor.

60. Să se indice formulele de structură și denumirile izomerilor care corespund formulei moleculare C_6H_{14}.

61. Analiza elementară a unei substanțe organice conduce la următoarele rezultate: C% — 54,55; H% — 9,09 (restul fiind oxigen). Să se indice formula brută a substanței analizate.

P. CHIMIE ANORGANICĂ
(Farmacie — iulie 1979)

62. Legile transformărilor chimice.

63. Fosforul: obținere și proprietăți fizice și chimice.

64. Se ard 2,3 g sodiu metalic într-un cilindru conținînd 1,5 l clor, măsurat în condiții normale. Ce cantitate de clorură de sodiu se formează?

65. Calculați cantitatea maximă de clorură de amoniu care se poate dizolva la 80°C într-un kg de soluție, saturată la 20°C cu clorură de amoniu, dacă solubilitatea acestei substanțe la 20°C este de 37,2 g la 100 g apă, iar la 80°C este de 65,6 g la 100 g apă.

II. REZOLVĂRI

A

1. Vezi manual

2.

$$H_2N-CH_2-COOH + HONO \longrightarrow HO-CH_2-COOH + N_2 + H_2O$$

$$CH_3-\underset{\displaystyle NH_2}{\underset{|}{CH}}-COOH + HONO \longrightarrow CH_3-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}}-COOH + N_2 + H_2O$$

3.

$$C_6H_5CH_3 \xrightarrow[h\nu]{2Cl_2} C_6H_5-CHCl_2 \xrightarrow[-2HCl]{H_2O} C_6H_5CHO \xrightarrow{HCN}$$

$$\longrightarrow C_6H_5CHOH-CN \xrightarrow[-NH_3]{2H_2O} C_6H_5CHOH-COOH \ldots$$

4. *a)* $Zn + NaOH + 2H_2O \longrightarrow Na[Zn(OH)_3] + H_2$

$Cu + H_2SO_4 + 1/2O_2 \longrightarrow CuSO_4 + H_2O$

b) $_{Zn}$ $m = \dfrac{65 \times 11,2}{22,4} = 32,5$ g ... 71,74% Zn

$$m_{Cu} = \frac{0,49 \times 40 \times 64}{98} = 12,8 \text{ g} \ldots 28,26\% \text{ Cu}$$

c) $m_{CuSO_4 \cdot 5H_2O} = \dfrac{0,49 \times 40 \times 250}{98} = 50$ g.

5.

$$C_3H_8 + 5\ O_2 \longrightarrow 3\ CO_2 + 4\ H_2O$$

$$C_4H_{10} + 13/2\ O_2 \longrightarrow 4\ CO_2 + 5\ H_2O$$

$(0,2 \times 5) + (0,8 \times 6,5) = 6,2$ moli O_2/molul de amestec gazos

a) 1 000/22,4 = 44,6 moli gaz (amestec de propan și butan) ...

$44,6 \times 6,2 \times 22,4 = 6193,6$ l $O_2 = 6,1936$ m^3O_2

$6,193 \times 100/21 = 29,5$ m^3 aer ...

b) $(0,2 \times 44) + (0,8 \times 58) = 55,2$ (masa moleculară medie)

1 000/55,2 = 18,1 moli gaz (propan + butan)

$$\frac{22,4 \times 18,1 \times 6,2 \times 100}{21} = 22,4 \times 533,3 = 11\,947 \text{ l} = 11,947 \text{ m}^3 \text{ aer/kg}$$

c) $(0,2 \times 3) + (0,8 \times 4) = 0,6 + 3,2 = 3,8$ moli CO_2

$(0,2 \times 4) + (0,8 \times 5) = 0,8 + 4 = 4,8$ moli H_2O

$3,8 \times 100/8,6 = 44,2\%$ ... vol. CO_2

$4,8 \times 100/8,6 = 55,8\%$ ... vol. H_2O (vapori)

B

6. Vezi manual

7. $4\ NH_3 + 5\ O_2 \longrightarrow 4\ NO + 6\ H_2O$

$2\ NO + O_2 \longrightarrow 2\ NO_2$

$2\ NO_2 + H_2O \longrightarrow HNO_3 + HNO_2$

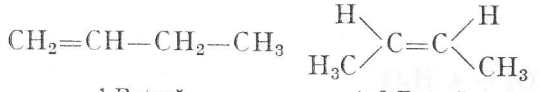
$HNO_2 + NO_2 \longrightarrow HNO_3 + NO$

$3\ NO_2 + H_2O \longrightarrow 2\ HNO_3 + NO$

NH_3 + Acid $\longrightarrow$ Sare de amoniu (2 exemple)

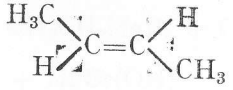
8. Vezi manual

9. $56 = 12\ n + 2\ n$; $n = 4$

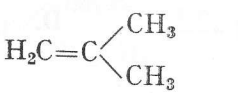


1-Butenă (1)

cis-2-Butenă (2)



trans-2-Butenă (3)

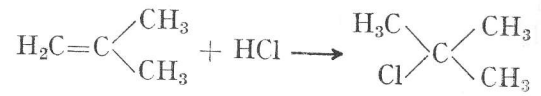


izo-Butenă (2-metil-propenă) (4)

(*1*) și (*2*) sau (*3*) ⇒ Izomeri de poziție
(*2*) și (*3*) ⇒ Izomeri geometrici (stereoizomeri)
(*4*) și (*1*) sau (*2*) sau (*3*) ⇒ Izomeri de catenă

$CH_2=CH-CH_2-CH_3 + HCl \longrightarrow CH_3-CHCl-CH_2-CH_3$

(*2*) sau (*3*) + $HCl \longrightarrow CH_3-CHCl-CH_2-CH_3$



10. Se notează cu:

$x \longrightarrow$ moli/l HCl

$y \longrightarrow$ moli/l H_2SO_4

$x + 2y = 0,8$

$58,5x + 142y = 50$

$x = 0,544$ moli/l HCl.

$y = 0,128$ moli/l H_2SO_4.

C.

11. H_2S, CH_3COOH, NH_3, HF ...

12. Vezi manual

13. Vezi manual

14. *a*) $C_6H_{12}O_6 \longrightarrow 2\ CO_2 + 2\ CH_3CH_2OH$

b) 360 kg = 2 kmoli $C_6H_{12}O_6$ ... 4 kmoli $C_2H_5OH = 4 \times 46 = 184$ kg

$184 \times 80/100 = 147,2$ kg C_2H_5OH

$147,2 \times 100/80 = 184$ kg C_2H_5OH 80%.

D.

15. Vezi manual

16. *a*) $3\ H_2SO_4 + 2Al \longrightarrow Al_2(SO_4)_3 + 3\ H_2$

$H_2SO_4 + Cu \longrightarrow CuO + SO_2 + H_2O$

$H_2SO_4 + CuO \longrightarrow CuSO_4 + H_2O$

$2H_2SO_4 + Cu \longrightarrow CuSO_4 + SO_2 + 2H_2O$

b) $CH_3—CH_2—CH_2—CH_2—CH_3$

n-pentan

$CH_3—CH(CH_3)—CH_2—CH_3$

2-Metil-butan (izo-pentan)

$C(CH_3)_4$

Dimetil-propan (tetrametil-metan)

Izomerie de catenă

17. Vezi manual

18. *a*) $C + O_2 \longrightarrow CO_2$

$S + O_2 \longrightarrow SO_2$

440 g CO_2 ... 10 moli CO_2 ... 120g C

224 l SO_2 ... 10 moli SO_2 ... 320g S

% C = 120 · 100/440 = 27,27

% S = 320 · 100/440 = 72,73.

b) 20 moli O_2 = 448 l O_2

448 · 100/20 = 2 240 l aer.

E.

19. Vezi manual

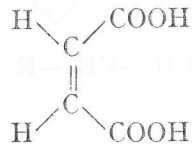
20. $CH_3CH_2OH + HBr \longrightarrow CH_3CH_2Br + H_2O$

$CH_3CH_2Br + Mg \longrightarrow CH_3CH_2MgBr$

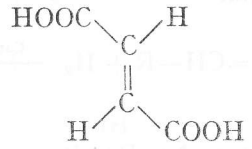
$CH_3CH_2MgBr + CH_2O \rightarrow H_2C(OMgBr)(CH_2CH_3) \xrightarrow{H_2O} HOCH_2CH_2CH_3 +$

$+ MgBr(OH)$

21. Formulei moleculare $C_4H_4O_4$ îi corespund izomerii:

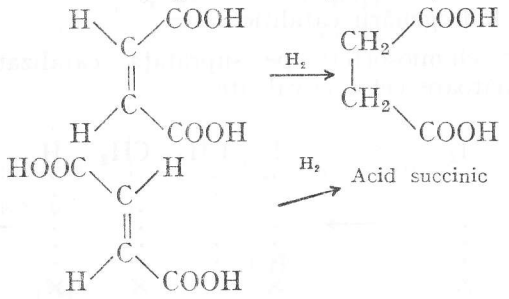


Acid maleic



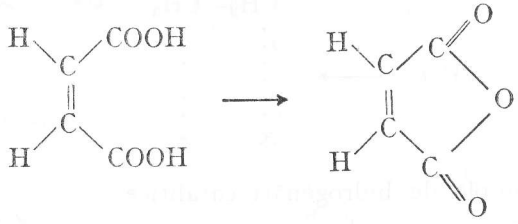
Acid fumaric

— Prezintă izomerie geometrică (*cis-trans*).

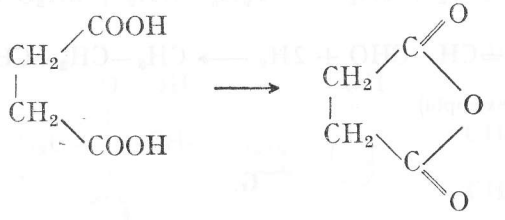


Acid succinic

— Pot forma anhidride acizii maleic și succinic.



Anhidridă maleică



Anhidridă succinică

F.

22. Vezi manual

23. Vezi manual

24. *a*) $R-CH=CH-R + H_2 \xrightarrow{Cat} R-CH_2-CH_2-R$

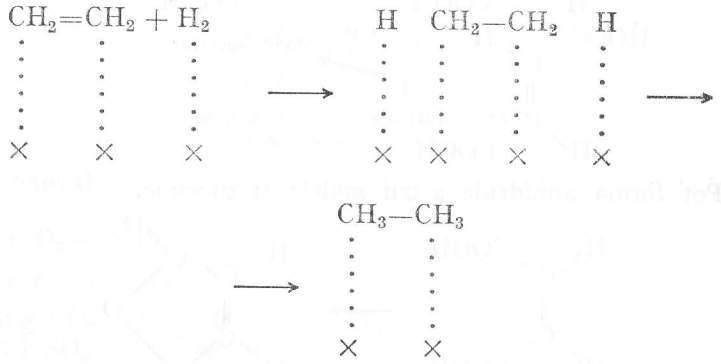
(Orice R)

Catalizator: Ni, Pd, Pt ș.a.

— Aplicații la hidrogenarea grăsimilor vegetale

b) Mecanismul hidrogenării catalitice:

Moleculele sînt chimiosorbite pe suprafața catalizatorului prin legături asemănătoare celor covalente:



c) Alte exemple de hidrogenări catalitice

$$C_6H_5-NO_2 + 3H_2 \xrightarrow{Ni} C_6H_5-NH_2 + 2H_2O$$

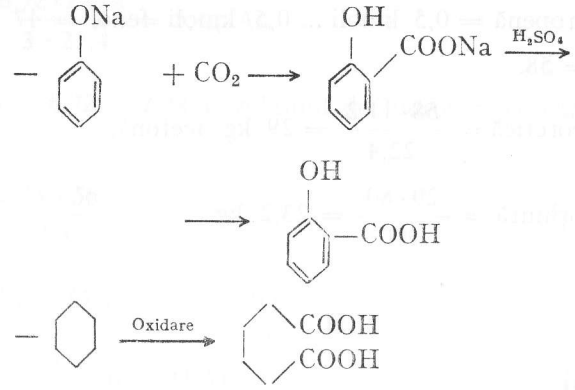
$$CH_3-CH=CH-CHO + 2H_2 \longrightarrow CH_3-CH_2-CH_2-CH_2OH$$

(Sau un alt exemplu)

G.

25. Vezi manual

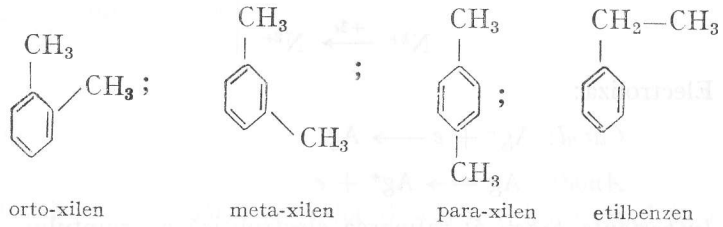
26. $HC\equiv CH + HCN \longrightarrow CH_2=CH-CN$



sau

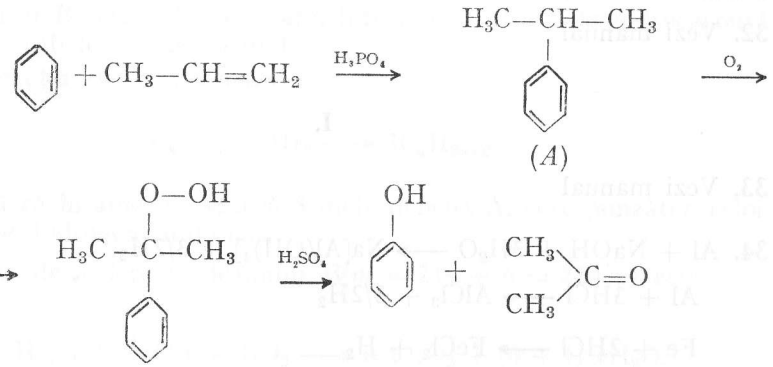
Ciclohexenă
Ciclohexanol
Ciclohexanonă
} $\xrightarrow{Oxidare}$ Acid adipic

27.



orto-xilen; meta-xilen; para-xilen; etilbenzen

28. *a*)



(*A*)

b) $M_{fenol} = 94$.

11,2 m^3 propenă = 0,5 kmoli ... 0,5 kmoli fenol = 47 kg fenol.

c) $M_{acetonă} = 58$.

$$\text{Cantitate teoretică} = \frac{58 \cdot 11,2}{22,4} = 29 \text{ kg acetonă.}$$

$$\text{Cantitate obținută} = \frac{29 \cdot 80}{100} = 23,2 \text{ kg.}$$

H.

29. Vezi manual

30. Vezi manual

31. $3Ag + 4HNO_3 \longrightarrow 3AgNO_3 + NO + 2H_2O$

$$\begin{array}{l|l} Ag \xrightarrow{+1e} Ag^+ & \times 3 \\ N^{5+} \xrightarrow{+3e} N^{2+} & \end{array}$$

Electroliza:

Catod: $Ag^+ + e \longrightarrow Ag$

Anod: $Ag \longrightarrow Ag^+ + e$

Importanța practică: rafinarea electrolitică a argintului.

32. Vezi manual

I.

33. Vezi manual

34. $Al + NaOH + 3H_2O \longrightarrow Na[Al(OH)_4] + 3/2H_2$

$Al + 3HCl \longrightarrow AlCl_3 + 3/2H_2$

$Fe + 2HCl \longrightarrow FeCl_2 + H_2$

$$m_{Al} = \frac{6,72 \cdot 27 \cdot 2}{3 \cdot 22,4} = 5,4\text{g Al.}$$

8,96 — 6,72 = 2,24 l (volumul de hidrogen ce corespunde pentru fer).

$$m_{Fe} = \frac{2,24 \cdot 56}{22,4} = 5,6\text{g Fe.}$$

$m_{Cu} = 13 - (5,4 + 5,6) = 2\text{gCu.}$

$$\% \text{ Al} = \frac{5,4}{13} 100 = 41,54.$$

$$\% \text{ Fe} = \frac{5,6}{13} 100 = 43,08.$$

$$\% \text{ Cu} = \frac{2}{13} 100 = 15,38.$$

35. Vezi manual

36. Se notează cu n numărul atomilor de carbon din alcanul B, cu x numărul de moli de hidrocarbură B și cu M masa moleculară a alcanului B. După hidrogenare, întreaga cantitate de hidrocarbură se află sub formă de alcan B.

Din reacția de hidrogenare

$$3C_nH_{2n} + 3H_2 \longrightarrow 3C_nH_{2n+2}$$

rezultă că în amestec se află 3 moli alchenă A, corespunzător celor 6 g de hidrogen adiționat.

Reacția de ardere a alcanului B($m = 214 + 6 = 220$ g) este

$$xC_nH_{2n+2} + \frac{x}{2}(3n + 1)O_2 \longrightarrow n\,x\,CO_2 + (n + 1)\,xH_2O.$$

De unde:

$nx = 336/22{,}4 = 15$ moli CO_2

și $x = 15/n$.

$M = 12\ n + 2\ n + 2 = 14\ n + 2$

$m = xM = \frac{15}{n}(14\ n + 2) = 220; \quad n = 5.$

Cele două hidrocarburi din amestec sînt:

A ... C_3H_6; $H_3C{=}CH{-}CH_3$ (Propenă).

B ... C_3H_8; $H_3C{-}CH_2{-}CH_3$ (Propan).

Numărul total de moli din amestec (x):

$x = 15/n = 15/3 = 5.$

Numărul de moli B în amestec $= 5 - 3 = 2$ moli.

Exprimarea concentrației în % — moli și % — vol:

$A/B = 3/2$; $\%A = 3 \cdot 100/5 = 60$; $\%B = 2 \cdot 100/5 = 40$.

Exprimarea concentrației în % — masă:

$$\%A = \frac{3 \cdot 42 \cdot 100}{214} = 58{,}88.$$

$$\%B = \frac{2 \cdot 44 \cdot 100}{214} = 41{,}12.$$

37. *a*) $NaCl + H_2SO_4 \xrightarrow{\text{La rece}} NaHSO_4 + HCl$

$NaCl + NaHSO_4 \xrightarrow{\text{La cald}} Na_2SO_4 + HCl$

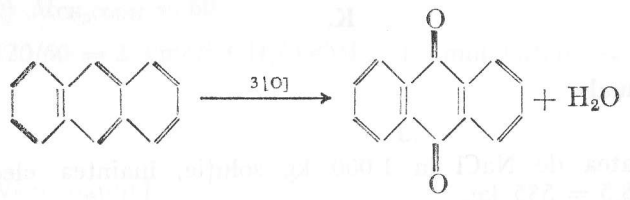
b) $2\ NH_4Cl + Ca(OH)_2 \longrightarrow 2\ NH_3 + 2H_2O + CaCl_2$

c) $CH_3CH_2OH + O_2 \longrightarrow CH_3COOH + H_2O$

$HOOC{-}CH_2{-}COOH \longrightarrow CH_3COOH + CO_2$

$CH_3{-}CHO + 1/2O_2 \longrightarrow CH_3COOH$

d)



38. Vezi manual

39. *a*) $AgNO_3 + NaCl \longrightarrow AgCl + NaNO_3$

$$\%\ NaCl = \frac{3{,}4 \cdot 58{,}5}{170} = 1{,}17\ \text{g NaCl/100 g soluție.}$$

b) $$\%\ NaNO_3 = \frac{85 \cdot 3{,}4}{2 \cdot 170} = 0{,}85\ \text{g } NaNO_3\text{/100 g soluție.}$$

40. Vezi manual

41. $R{-}CH{=}CH{-}R + Br_2 \longrightarrow R{-}CHBr{-}CHBr{-}R$

$$m_{Br} = \frac{80 \cdot 100}{1\,000} = 8\ \text{g } Br_2.$$

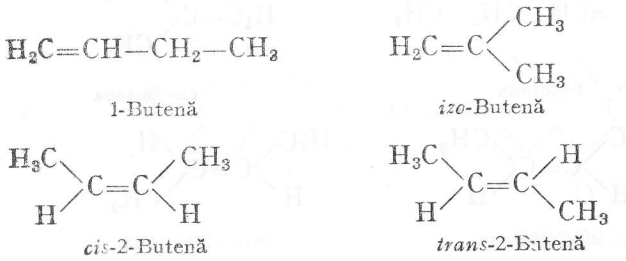
Se calculează masa moleculară M a alchenei:

$$M = \frac{160 \cdot 2{,}8}{8} = 56.$$

$M = 56 = 12\ n + 2\ n = 14\ n$; $n = 56/14 = 4$.

Formula moleculară: C_4H_8.

Izomerii:



K.

42. Vezi manual

43. *a*) Cantitatea de NaCl în 1 000 kg soluție, înaintea electrolizei = 10 x 58,5 = 585 kg.
Cantitatea de NaCl rămasă în soluție după electroliză = 117 kg.
Cantitatea de NaCl electrolizată = 585 — 117 = 468.
Reacțiile la electrozi:

$$A(-): Na^+ + e^- \longrightarrow Na^\circ$$

$$Na + H_2O \longrightarrow NaOH + 1/2\ H_2$$

$$K(+): Cl^- \longrightarrow Cl^\circ + e^-$$

$$Cl^\circ \longrightarrow 1/2\ Cl_2$$

$$m_{NaOH} = \frac{468 \cdot 40}{58,5} = 320 \text{ kg.}$$

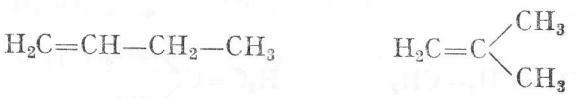
b) $$V_{H_2} = V_{Cl_2} = \frac{468 \cdot 22,4/2}{58,5} = 89,6 \text{ m}^3.$$

44. Vezi manual

45. *a*) Acidul acetic poate rezulta, în condițiile date, numai prin oxidarea unei duble legături. Rezultă că alchena dată este 2-butena:

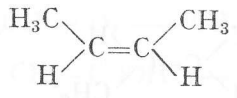
$$CH_3{-}CH{=}CH{-}CH_3 + 2O_2 \longrightarrow 2CH_3COOH$$

Izomerii alchenei:

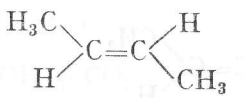


1-Butena

izo-Butena



cis-2-Butena



trans-2-Butena

b) $M_{CH_3COOH} = 60$

120/60 = 2 kmoli CH_3COOH ... 1 kmol butenă = 22,4 m³.

L.

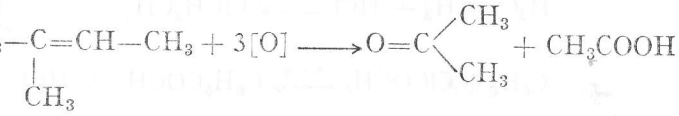
46. Vezi manual

47. *a*) 3 kmoli $NH_3 \longrightarrow$ 3 kmoli $HNO_3 = 3 \cdot 63 = 189$ kg.

b) $$\frac{189 \cdot 100}{85} = 222,35 \text{ kg } HNO_3\ 85\%.$$

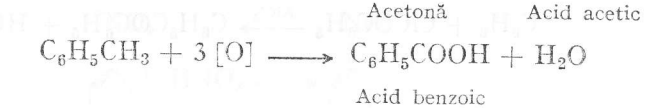
48. Vezi manual

49. *a*)



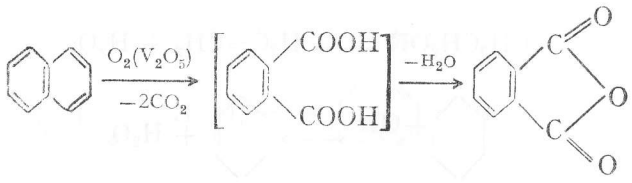
Acetonă — Acid acetic

b)



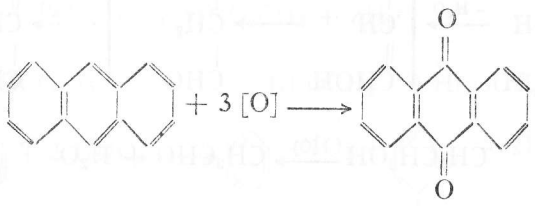
Acid benzoic

c)



Acid ftalic — Anhidridă ftalică

d)



Antrachinonă

M.

50. *a*) $C_6H_6 + ClCH_3 \xrightarrow{AlCl_3} C_6H_5CH_3 + HCl$

$C_6H_5CH_3 + ClCH_3 \xrightarrow{AlCl_3} C_6H_4(CH_3)_2 + HCl$

$C_6H_6 + ClCH_2CH_3 \xrightarrow{AlCl_3} C_6H_5CH_2CH_3 + HCl$

b) $C_6H_6 + H_2C{=}CH_2 \xrightarrow{AlCl_3} C_6H_5CH_2CH_3$

$AlCl_3 + 3H_2O \longrightarrow Al(OH)_3 + 3HCl$

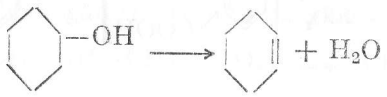
$H_2C{=}CH_2 + HCl \longrightarrow ClCH_2CH_3$

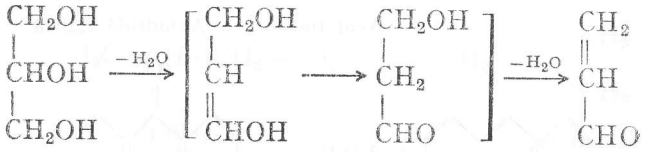
c) $C_6H_6 + ClCOCH_3 \xrightarrow{AlCl_3} C_6H_5COCH_3 + HCl$

$C_6H_6 + ClCOC_6H_5 \xrightarrow{AlCl_3} C_6H_5COC_6H_5 + HCl$

51. *a*) Deshidratarea și oxidarea alcoolilor

$CH_3CH_2OH \longrightarrow H_2C{=}CH_2 + H_2O$



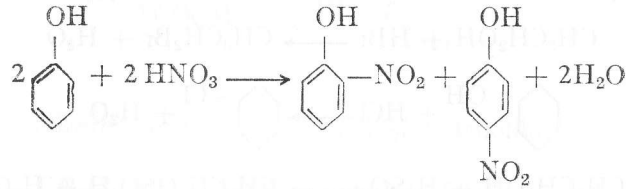


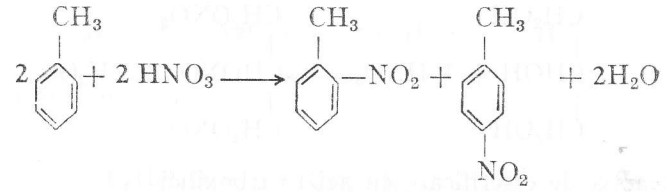
$CH_3CH_2OH \xrightarrow{[O]} CH_3CHO + H_2O$

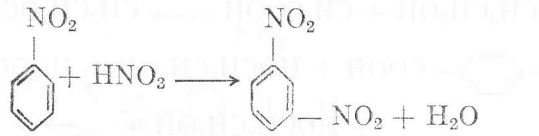
$CH_3CHOHCH_3 \xrightarrow{[O]} CH_3COCH_3 + H_2O$

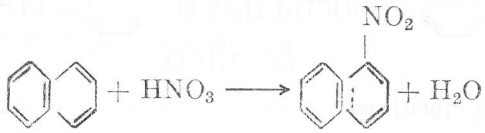
b) Reacția de nitrare

$C_6H_6 + HONO_2 \longrightarrow C_6H_5NO_2 + H_2O$



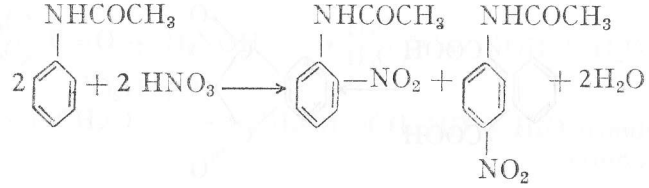






$2\ CH_3CH_2CH_3 + 2HNO_3 \longrightarrow CH_3CH_2CH_2NO_2 +$

$+ CH_3CHNO_2CH_3 + 2H_2O$

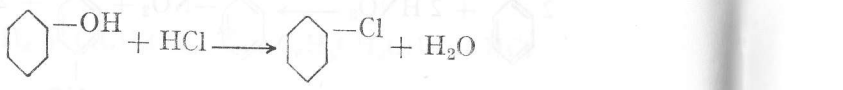


c) Reacția de sulfonare

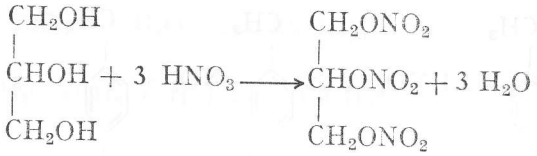
$$C_6H_6 + HOSO_3H \longrightarrow C_6H_5SO_3H + H_2O$$

d) Reacția de esterificare cu acizi minerali

$$CH_3CH_2OH + HBr \longrightarrow CH_3CH_2Br + H_2O$$

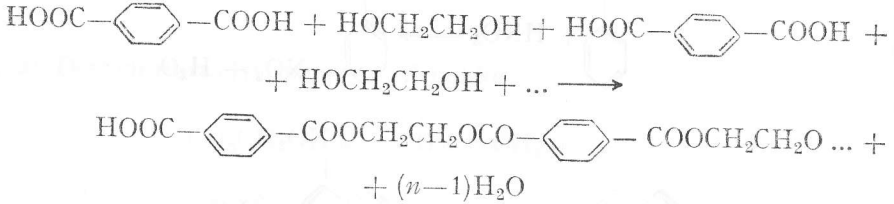


$$CH_3CH_2OH + H_2SO_4 \longrightarrow CH_3CH_2OSO_3H + H_2O$$



e) Reacția de esterificare cu acizi carboxilici

$$CH_3CH_2OH + CH_3COOH \longrightarrow CH_3CH_2OCOCH_3 + H_2O$$

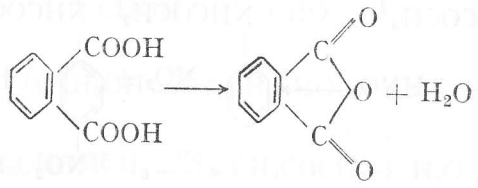


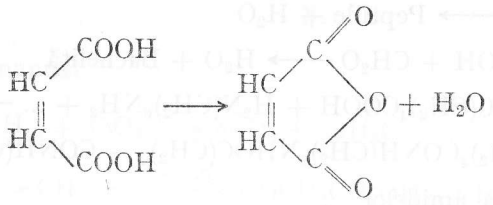
f) Reacția de eterificare

$$CH_3CH_2OH + CH_3CH_2OH \longrightarrow CH_3CH_2OCH_2CH_3 + H_2O$$

$$2C_6H_{12}O_6 \longrightarrow C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O$$

g) Deshidratarea acizilor dicarboxilici





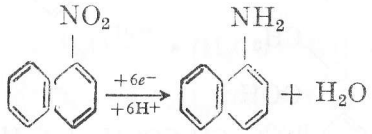
h) Neutralizarea acizilor carboxilici și a fenolilor

$$CH_3COOH + NaOH \longrightarrow CH_3COONa + H_2O$$

$$C_6H_5OH + NaOH \longrightarrow C_6H_5ONa + H_2O$$

i) Reducerea nitroderivaților

$$C_6H_5NO_2 \xrightarrow[+6H^+]{+6e^-} C_6H_5NH_2 + 2H_2O$$



j) Reacții ale aminelor cu acidul azotos

$$CH_3NH_2 + ONOH \longrightarrow CH_3OH + N_2 + H_2O$$

k) Reacții de condensare

$$C_6H_5CHO + H_2NOH \longrightarrow C_6H_5CH{=}NOH + H_2O$$

$$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix}\!\!>\!C{=}O + H_2NOH \longrightarrow \begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix}\!\!>\!C = NOH + H_2O$$

$$CH_3CHO + CH_3CHO \longrightarrow CH_3CH{=}CHCHO + H_2O$$ (condensare crotonică)

Aminoacizi $\longrightarrow$ Peptide + H_2O

$C_6H_5OH + CH_2O \longrightarrow H_2O$ + Bachelită

$HOOC(CH_2)_4COOH + H_2N(CH_2)_6NH_2 + \ldots \longrightarrow$

$\longrightarrow HOOC(CH_2)_4CONH(CH_2)_6NHOC(CH_2)_4 - CONH(CH_2)_6-NH- \ldots$

l) Prepararea amidelor

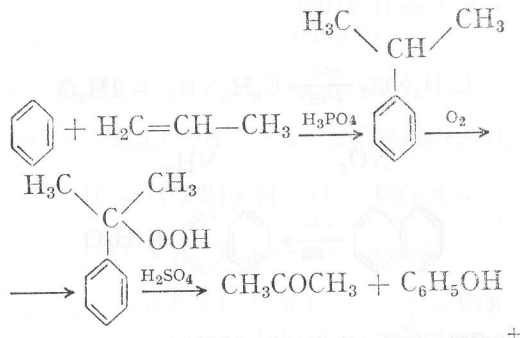
$$CH_3COONH_4 \longrightarrow CH_3CONH_2 + H_2O$$

m) Deshidratarea acizilor carboxilici inferiori

$$HCOOH \longrightarrow CO + H_2O$$

$$\begin{matrix} COOH \\ | \\ COOH \end{matrix} \longrightarrow CO + CO_2 + H_2O$$

52. *a*)



b) $H_2C=CH-CH_3 + H_2SO_4 \longrightarrow H_3C-\underset{\displaystyle OSO_3H}{\underset{|}{CH}}-CH_3 \xrightarrow[-H_2SO_4]{+H_2O}$

$$\longrightarrow H_3C-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}}-CH_3 \xrightarrow[-H_2O]{[O]} CH_3COCH_3$$

53. 3 $HOOC-CH_2NH_2 \longrightarrow$

$\longrightarrow HOOC-CH_2-NHCO-CH_2-NHCO-CH_2NH_2 + 2H_2O$

$M_{glicocol} = 75$

$M_{tripeptidă} = 3 \cdot 75 - 2 \cdot 18 = 189.$

$$\% N = \frac{3 \cdot 14 \cdot 100}{189} = 22{,}22.$$

N.

54. Vezi manual

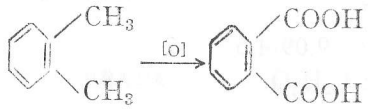
55. *a*) $2C_4H_{10} + 13O_2 \longrightarrow 8CO_2 + 10H_2O$

b) $H_2C=CH_2 \xrightarrow{+[O]+H_2O} HOCH_2CH_2OH + CH_3COCH_3$

$$CH_3-CH=C\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix} \xrightarrow[H_2SO_4]{K_2Cr_2O_7} CH_3COOH$$

$$R-CH=CR_2 \xrightarrow{[O]} RCOOH + O=CR_2$$

c) $C_6H_5CH_3 + 3[O] \longrightarrow C_6H_5COOH + H_2O$



56. *a*) $CH_3CH_2CN + 2H_2O \longrightarrow CH_3CH_2COOH + NH_3$

b) $HC\equiv CH + H_2O \xrightarrow{HgSO_4} (H_2C=CHOH) \longrightarrow CH_3CHO$

c) $C_6H_6 + HNO_3 \longrightarrow C_6H_5NO_2 + H_2O$

$C_6H_5NO_2 + 6e^- + 6H^+ \longrightarrow C_6H_5NH_2 + 2H_2O$

$C_6H_5NH_2 + 2CH_3OSO_3H \longrightarrow C_6H_5N(CH_3)_2 + 2H_2SO_4$

d) $C_6H_6 + ClCH_3 \xrightarrow{AlCl_3} C_6H_5CH_3 + HCl$

$$C_6H_5CH_3 + Cl_2 \xrightarrow[-HCl]{Lumină} C_6H_5CH_2Cl \xrightarrow[-HCl]{+Cl_2,\ Lumină}$$

$$\longrightarrow C_6H_5CHCl_2 \xrightarrow[-2HCl]{+2H_2O} [C_6H_5CH(OH)_2] \xrightarrow{-H_2O} C_6H_5CHO$$

57. 85,71/12 = 7,14; 14,29/7,14 = 2.

Formula brută: CH_2.

Formula moleculară: $(CH_2)_n$.

$n = 84/14 = 6$; C_6H_{12}.

O.

58. Vezi manual

59. Vezi manual

60. $CH_3CH_2CH_2CH_2CH_2CH_3$
Normal-hexan

$CH_3-\underset{\displaystyle CH_3}{\overset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{\overset{|}{CH}}}}-CH_2-CH_2-CH_3$
2-Metil-pentan

$H_3C-\underset{\displaystyle CH_3}{\overset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{\overset{|}{C}}}}-CH_2CH_3$
2,2-Dimetil-butan

$CH_3-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-CH_3$
2,3-Dimetil-butan

61. $54,55/12 = 4,54$; $100 - (54,55 + 9,09) = 33,36\%$ O
$33,36/16 = 2,27$
$9,09=2,27 = 4$; $9,09/4,54 = 2$
Formula brută: C_2H_4O.

P.

62. Vezi manual.

63. Vezi manual.

64. $2Na + Cl_2 \longrightarrow 2NaCl$

$$m_{NaCl} = \frac{2,3 \cdot 2 \cdot 58,5}{2 \cdot 23} = 5,85g \text{ NaCl.}$$

65. Masa soluției date = 1 000 + 372 = 1 372g.

m_{NH_4Cl} în 1 000g soluție $= \frac{372 \cdot 100}{1372} = 270g\ NH_4Cl$ (la 20°C).

m_{H_2O} din 1 000g soluție = 1 000 — 270 = 730g H_2O.

m_{NH_4Cl} din 1 000g soluție la 80°C $= \frac{656 \cdot 730}{1\,000} = 477,88g\ NH_4Cl$.

477,88 — 270 = 208,88 g.

Plan editură Nr. 5929. Coli de tipar 11,50 Bun de tipar 12.05.1980

Tiparul executat sub comanda nr. 859 la
Întreprinderea poligrafică
„13 Decembrie 1918",
str. Grigore Alexandrescu nr. 89—97
București,
Republica Socialistă România

ERATA

Pag.	Rîndul	În loc de:	Se va citi:
17	9 jos	$\log \sqrt{x}\, a$	$\log_{\sqrt{x}} a$
40	8 sus	$\frac{AB}{CF} + \frac{AD}{CE}$	$\frac{AB}{CF} + \frac{AD}{CE} = 1$
41	9 jos	$2\sqrt{2} \leqslant 2^{3/2} =$	$2^{\sqrt{2}} \leqslant 2^{3/2} =$